Morphismes entre les groupes de difféomorphismes de variétés

Jaouad Mourtada

Mémoire de Master 2
Mathématiques Fondamentales

Sous la direction de Frédéric Le Roux

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux groupes des difféomorphismes de variétés lisses, et aux liens qu'entretiennent ces groupes de transformations avec les objets géométriques sous-jacents. Ce type de correspondance entre un objet géométrique et une structure algébrique associée est courant en mathématiques. Par exemple, le problème des relations qu'entretiennent un espace et son algèbre de fonctions est assez bien compris : comme nous le montrons dans ce texte, une variété lisse compacte M est caractérisée par son algèbre de fonctions lisses $\mathscr{C}^\infty(M)$, et tout morphisme d'algèbres $\mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(N)$ provient de la composition à droite par une application lisse $N \to M$ (théorème 2.15).

De manière encore plus aboutie, la géométrie non commutative établit une équivalence de catégorie entre la catégorie des espaces topologiques compacts et (le dual de) la catégorie des C^*-algèbres commutatives (cf. [Con] pour plus de détails). Un autre exemple est le théorème de Serre-Swan : les fibrés vectoriels sur une variété lisse compacte M correspondent exactement aux modules de type fini sur l'anneau $\mathscr{C}^\infty(M)$, l'équivalence de catégorie étant fournie par le foncteur qui à un fibré vectoriel $\xi : E \to M$ associe le $\mathscr{C}^\infty(M)$-module de ses sections lisses $\Gamma(\xi)$.

Dans le cas des algèbres, comme nous le verrons, pour montrer qu'une algèbre de fonctions caractérise l'espace sous-jacent, il est souvent possible de « retrouver » les points de cet espace, ainsi que sa géométrie, à partir d'objets algébriques définis sur l'algèbre, comme par exemple les morphismes d'algèbres $A \to \mathbf{R}$. Cette approche permet en général d'obtenir des constructions fonctorielles, qui « passent aux morphismes », et d'obtenir des équivalences de catégories.

Dans le cas des groupes de transformations, en revanche, l'étude est plus délicate, et il est plus difficile de retrouver l'espace géométrique à partir de son groupe de transformations, ce qui tient pour partie à la structure algébrique plus pauvre des groupes. Dans le cas des espaces topologiques compacts, un premier résultat a été obtenu par J. V. Whittaker [Whit] en 1962 : si X est une variété topologique compacte (avec ou sans bord), X est caractérisée par son groupe d'homéomorphismes $\mathrm{Homeo}(X)$. De plus, tout isomorphisme $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(Y)$ provient de la conjugaison par un homéomorphisme entre X et Y. Le résultat n'est plus vrai lorsque l'on abandonne l'hypothèse de compacité, puisque $\mathrm{Homeo}([0,1]) \simeq \mathrm{Homeo}(]0,1[)$.

Dans le cas des variétés lisses, l'équivalent de ce résultat a été démontré par R. P. Filipkiewicz en 1982 [Fil] :

Théorème (Filipkiewicz)**.** *Soient M et N deux variétés lisses, connexes et sans bord, et soit $\Phi : \mathrm{Diff}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}(N)$ un isomorphisme entre leurs groupes de $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes. Alors il existe un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $w : M \xrightarrow{\sim} N$ tel que $\Phi(f) = w \circ f \circ w^{-1}$ pour toute $f \in \mathrm{Diff}(M)$.*

L'idée de la preuve de Filipkiewicz est de montrer que Φ envoie le stabilisateur d'un point $x \in M$ sur le stabilisateur d'un point $f(x) \in N$, puis de montrer que l'application $f : M \to N$ induite est lisse en utilisant un théorème dû à Montgomery et Zippin sur les actions de groupes de Lie par difféomorphismes sur les variétés (théorème 3.16 plus bas). Nous retrouverons dans ce mémoire le théorème de Filipkiewicz dans le cas des difféomorphismes à support compact.

Un objectif plus ambitieux consiste à aller plus loin, et à étudier les morphismes généraux entre groupes de transformations (pas nécessairement bijectifs). Par commodité, si M est une variété, nous considérons le sous-groupe distingué $\mathrm{Diff}_c(M)$ des difféomorphismes de M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact. Par un théorème de Thurston et Mather (voir [Thu] et [Mat]), ce groupe est simple [1]. Par conséquent, tout morphisme de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ non trivial est injectif.

Des exemples de morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ proviennent de plongements ouverts $M \hookrightarrow N$, par prolongement en l'identité sur $N \setminus M$ (ce qui est possible car l'on considère des difféomorphismes à support compact). Un autre exemple provient des revêtements : si $\pi : N \to M$ est un

1. Pour montrer que ce groupe est simple, on montre d'abord qu'il est *parfait*, *i.e.* que tout élément est un produit de commutateurs. Pour cela, on s'appuie sur une propriété fondamentale de ce groupe : la propriété de *fragmentation*, que nous établirons dans ce texte (proposition 3.11).

revêtement fini, tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ se relève en un difféomorphisme $\tilde{f} \in \mathrm{Diff}_c(N)$. De plus, sous certaines conditions (voir la section 3.2.2), le relèvement des difféomorphismes à N induit un morphisme de groupes. D'autres exemples sont donnés par des fibrés sur M construits à partir du fibré tangent (sur lequel $\mathrm{Diff}_c(M)$ agit), comme par exemple le fibré unitaire $T^1M = TM/\mathbf{R}_+^*$ ou les grassmanniennes $\mathrm{Gr}_k(TM)$ (l'action est à support compact car les fibres sont compactes).

Étant donné que tout morphisme de groupes non trivial $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est injectif, une question raisonnable, formulée par E. Ghys [Ghy], est de savoir si l'existence d'un morphisme $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ implique que $\dim(M) \leqslant \dim(N)$. K. Mann [Man] apporte une réponse affirmative à cette question, dans le cas où N est de dimension 1. De plus, elle fournit une description géométrique de tous les morphismes de groupes dans le cas où M et N sont de dimension 1, en montrant qu'un tel morphisme est ce qu'elle appelle *topologiquement diagonal*, c'est-à-dire induit par des plongements multiples $M \subset N$ en des ouverts deux-à-deux disjoints.

S. Hurtado, dans son article [Hur] sur lequel se fonde l'essentiel de ce mémoire, généralise ce résultat au cas de variétés compactes de dimensions quelconques. Plus précisément, l'article établit deux grands résultats : le premier est un résultat de continuité :

Théorème 1.1. *Si M et N sont deux variétés lisses, avec N compacte, tout morphisme de groupes* $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ *est faiblement continu.*

La propriété de continuité faible, qui sera définie par la suite (définition 3.13), coïncide avec la continuité en topologie $\mathscr{C}^\infty$ lorsque M est compacte, mais pas *a priori* dans le cas général ; elle est introduite pour des raisons techniques. En fait, si nous effectuons la preuve en supposant N compacte par commodité et pour ne pas alourdir certains passages, nous expliquons ensuite comment cette preuve s'adapte dans le cas où N est non compacte.

Le second résultat, qui complète le premier, démontre la conjecture de Ghys et décrit géométriquement les morphismes faiblement continus lorsque les variétés ont la même dimension. Contrairement au cas unidimensionnel, ceux-ci ne sont pas tous topologiquement diagonaux, car on peut aussi trouver des morphismes associés à des revêtements. Cependant, en combinant ces deux catégories de morphismes (suivant [Hur], on appelle *topologiquement diagonaux étendus* les morphismes ainsi obtenus, voir la définition 3.28 pour plus de précision), on obtient tous les morphismes continus :

Théorème 1.2. *Soit* $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ *morphisme de groupes faiblement continu, avec* $\dim(M) \geqslant \dim(N)$*. Alors* $\dim(M) = \dim(N)$ *et* Φ *est topologiquement diagonal étendu.*

Ce mémoire est, pour l'essentiel (à l'exception de la partie 2.1, consacrée aux algèbres de fonctions), consacré à la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2, en suivant la démonstration apportée par Hurtado.

1.2 Principe de la preuve

Exposons ici les grandes lignes de la preuve du principal résultat de l'article de Hurtado [Hur] et de ce mémoire, c'est-à-dire du théorème 1.1 de continuité des morphismes entre groupes de difféomorphismes. Le théorème 1.2 de classification des morphismes continus, qui est le second résultat de ce texte par ordre d'importance et de difficulté, est quant à lui établi dans la partie 3, après une étude des principales propriétés de $\mathrm{Diff}_c(M)$, notamment la fragmentation, qui serviront dans tout le texte.

Soit f_n une suite de difféomorphismes de M, à support dans un même compact, convergeant vers l'identité. Il s'agit de montrer que $\Phi(f_n)$ converge également vers l'identité dans $\mathrm{Diff}_c(N)$. Pour cela, il faut commencer par traduire la propriété topologique $f_n \to \mathrm{id}$ en une propriété algébrique, donc préservée par le morphisme de groupes Φ. C'est précisément ce que permet de réaliser un théorème de Militon [Mili], présenté dans la partie 4, qui affirme que si la suite f_n tend suffisamment rapidement vers id, elle appartient à un sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}_c(M)$, et les f_n sont de longueur contrôlée dans ce groupe. Par conséquent, la suite $\Phi(f_n)$ appartient également à un sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}_c(N)$, dans lequel elle est également de longueur contrôlée.

La partie 5, essentiellement consacrée à des résultats techniques de majoration et de convergence, exploite alors ce résultat. On montre en particulier que la suite $\Phi(f_n)$ doit être bornée (en un sens $\mathscr{C}^\infty$ que l'on définira), puis qu'elle admet une sous-suite convergente (en topologie $\mathscr{C}^\infty$) vers un difféomorphisme h de N. En moyennant une métrique sur N quelconque par les puissances de h, dont on montre qu'elles sont bornées, on obtient une suite de métriques sur N, dont on peut extraire une sous-suite convergente. De plus, la métrique limite est invariante par h, donc $\Phi(f_n)$ converge vers une isométrie d'une métrique sur N (lemme 5.16).

Le lemme 5.16, ainsi que le lemme de fragmentation 3.11 et certaines constructions sur les actions de groupes par difféomorphismes, seront ensuite utilisées dans la preuve finale du théorème 1.1 (voir la partie 6).

1.3 Notations

Dans ce texte, les variétés et les difféomorphismes considérés sont, sauf mention explicite du contraire, supposés de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si M est une variété, on désigne par $\mathrm{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphisme de M, et $\mathrm{Diff}_c(M)$ le sous-groupe des difféomorphismes à support compact, isotopes à l'identité par une isotopie à support compact. Il s'agit bien d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$: il est stable par composition, et aussi par inverse comme le montre l'isotopie $\phi_1^{-1}\phi_{1-t}$, où ϕ_t est une isotopie à support compact.

1.4 Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Frédéric Le Roux d'avoir accepté de m'encadrer et de m'avoir proposé ce sujet. Son aide, sa patience et surtout sa grande souplesse dans l'organisation pratique de ce travail m'ont été très précieuses.

Chapitre 2

Étude des algèbres de fonctions sur des espaces compacts

Cette première partie a pour but d'établir des résultats sur les algèbres de fonctions analogues à ceux qui nous intéressent dans le cas des groupes de transformations. Les preuves sont cependant bien plus simples que dans le cas des groupes de transformations.

Tous les résultats de cette section restent valides en remplaçant le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels par le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Si X est un espace topologique, on note $\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions continues sur X à valeurs réelles. Si M est une variété différentiable de classe $\mathscr{C}^r$, on note $\mathscr{C}^r(M)$ l'algèbre des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^r$ sur M. Enfin, si A est une algèbre réelle, on note $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ l'ensemble des morphismes d'algèbres $A \to X$.

2.1 Algèbres de fonctions continues sur les espaces compacts

Dans cette section, X désigne un espace topologique compact. Nous allons montrer comment « retrouver » X à partir de la donnée (algébrique) de l'algèbre $\mathscr{C}(X)$.

Lemme 2.1. *Soit X un espace topologique compact. Les idéaux maximaux de $\mathscr{C}(X)$ sont exactement les $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid f(x) = 0\}$ pour $x \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, $\mathscr{C}(X)/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbf{R}$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbres, via l'évaluation en x.*

Démonstration. Montrons que tout idéal strict de $\mathscr{C}(X)$ est contenu dans un idéal de la forme $\mathfrak{m}_x$. Soit I un idéal de $\mathscr{C}(X)$ qui n'est inclus dans aucun des idéaux $\mathfrak{m}_x$: pour tout $x \in X$, il existe une fonction $f_x \in I$ telle que $f_x(x) \neq 0$. f étant continue, elle ne s'annule donc pas sur un voisinage U_x de x. La famille $(U_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact X, il admet donc un sous-recouvrement fini $(U_{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Mais alors la fonction $f = f_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}^2$, qui d'une part appartient à I, est d'autre part strictement positive sur chacun des U_{x_i}, donc sur X. Elle est donc inversible, d'où $I = \mathscr{C}(X)$.

Pour la deuxième affirmation, l'exemple des fonctions constantes montre que le morphisme d'algèbres $\mathscr{C}(X) \to \mathbf{R}$ défini par l'évaluation en x, de noyau $\mathfrak{m}_x$, est surjectif, d'où le résultat. $\square$

Lemme 2.2. *Soit X un espace topologique compact. Tout morphisme d'algèbres $\mathscr{C}(X) \to \mathbf{R}$ est de la forme $ev_x : f \mapsto f(x)$ pour un unique $x \in X$.*

Démonstration. L'unicité résulte de la normalité des espaces compacts : si $x \neq x'$, il existe $f \in \mathscr{C}(X)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(x') = 1$. Si maintenant $\chi : \mathscr{C}(X) \to \mathbf{R}$ est un morphisme d'algèbres, $\mathscr{C}(X)/\ker(\chi) \simeq \mathbf{R}$, donc $\ker(\chi)$ est un idéal maximal de $\mathscr{C}(X)$, donc égal à $\mathfrak{m}_x$ pour un certain $x \in X$ (cf. 2.1). χ coïncide avec l'évaluation en x sur le sous-espace $\mathbf{R}1$ des fonctions constantes et sur $\ker(\chi)$, donc sur $\mathbf{R}1 \oplus \ker(\chi) = \mathscr{C}(X)$. $\square$

Ce résultat signifie que l'application $ev : X \to \operatorname{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R})$ induite par l'évaluation est une bijection ensembliste. Pour récupérer l'espace topologique X à partir de l'algèbre $\mathscr{C}(X)$, on va munir $\operatorname{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R})$ d'une topologie qui fait de ev un homéomorphisme.

Définition 2.3. Si A une algèbre réelle, la *topologie faible* sur $\operatorname{Hom}(A, \mathbf{R})$ est la topologie engendrée par les applications d'évaluation $\overline{ev}^f : \operatorname{Hom}(A, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ pour $f \in A$, définies par : $\overline{ev}^f(\chi) = \chi(f)$.

En d'autres termes, il s'agit de la topologie la moins fine qui rende continues toutes les applications $\overline{ev}^f$; elle est engendrée par les parties de la forme :

$$\mathscr{O}_{f,U} = \{\chi \in \operatorname{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R}) \,|\, \chi(f) \in U\}$$

où $f \in A$ et $U \subseteq \mathbf{R}$ est ouvert.

Dans cette section, on supposera toujours $\operatorname{Hom}(A, \mathbf{R})$ muni de la topologie faible. Notons que cet espace topologique n'est pas compact dans le cas général : par exemple, si $A = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, $\operatorname{Hom}(A, \mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ via $\chi \mapsto (\chi(X_i))_i$.

Proposition 2.4. *Soit X un espace topologique compact. L'application d'évaluation $ev : X \to \operatorname{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R})$ est un homéomorphisme.*

Remarque. Notons au passage que l'homéomorphisme ev fait en outre correspondre les fonctions f et $\overline{ev}^f$ définies respectivement sur X et $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R})$, au sens où $\overline{ev}^f \circ ev = f$ pour toute $f \in \mathscr{C}(X)$.

Démonstration. Soit $\mathscr{T}$ la topologie de X, et $\mathscr{T}'$ la topologie sur X induite par transport de la topologie faible de $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}(X), \mathbf{R})$ via ev (on a vu qu'il s'agissait d'une bijection). Nous voulons montrer que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

Notons d'abord que, par définition, $\mathscr{T}'$ est la topologie engendrée par les $\mathscr{O}_{f,U} = f^{-1}(U)$, où $f \in \mathscr{C}(X)$ et $U \subseteq \mathbf{R}$ est ouvert. On en déduit immédiatement que $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. Réciproquement, si $V \in \mathscr{T}$ et $x \in V$, il existe (par normalité de l'espace compact X, ou en utilisant la distance à x si X est métrisable) une fonction $f \in \mathscr{C}(X)$ telle que $f(x) = 1$ et $f = 0$ hors de V. L'ensemble $V' = f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$ appartient à $\mathscr{T}'$, et vérifie $x \in V' \subset V$, donc $\mathscr{T}'$ est plus fine que $\mathscr{T}$. Ainsi $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. □

Corollaire 2.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques compacts tels que les algèbres $\mathscr{C}(X, \mathbf{R})$ et $\mathscr{C}(Y, \mathbf{R})$ soient isomorphes. Alors X et Y sont homéomorphes.*

Nous allons préciser ce résultat, en déterminant tous les morphismes d'algèbres $\mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$, lorsque X et Y sont deux espaces compacts. Pour énoncer ce résultat, commençons par mettre en évidence le caractère fonctoriel des constructions précédentes.

Définition 2.6. On note EspTop la catégorie des espaces topologiques, $\mathsf{EspComp}$ la catégorie des espaces topologiques compacts, avec pour morphismes les applications continues, et Alg la catégorie des algèbres réelles, avec pour morphismes les morphismes d'algèbres.

En associant à tout espace compact X l'algèbre $\mathscr{C}(X)$, et à toute application continue $w : X \to Y$ le morphisme d'algèbres $w^* : \mathscr{C}(Y) \to \mathscr{C}(X)$, $f \mapsto f \circ w$, on définit un foncteur contravariant $\mathscr{C} : \mathsf{EspComp} \to \mathsf{Alg}$.

Par ailleurs, en associant à toute algèbre réelle A l'ensemble des morphismes d'algèbres $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ (muni de la topologie faible), et à tout morphisme d'algèbre $\phi : A \to B$ l'application continue $\phi^* : \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$, $\chi \mapsto \chi \circ \phi$, on définit un foncteur contravariant $\mathscr{H} : \mathsf{Alg} \to \mathsf{EspTop}$.

Démonstration. Le caractère contravariant de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{H}$ étant clair, la seule assertion à vérifier est que si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, l'application $\phi^* : \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ est continue. Cela résulte du fait que si $f \in A$ et $U \subseteq \mathbf{R}$ est ouvert, on a :

$$(\phi^*)^{-1}(\mathscr{O}_{f,U}) = \{\chi \in \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R}) \,|\, \chi \circ \phi(f) \in U\} = \mathscr{O}_{\phi(f),U}.$$

$\square$

Théorème 2.7. *Si $\phi : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$ est un morphisme d'algèbres, il existe une unique application continue $w : Y \to X$ telle que $\phi(f) = f \circ w$ pour toute $f \in \mathscr{C}(X)$.*

Par conséquent, si $\phi : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$ est un isomorphisme d'algèbres, il existe un unique homéomorphisme $w : X \to Y$ tel que $\phi(f) = f \circ w^{-1}$ pour toute $f \in \mathscr{C}(X)$. En particulier, $\mathrm{Aut}\,\mathscr{C}(X) \simeq \mathrm{Homeo}(X)$.

Démonstration. Soient $A = \mathscr{C}(X)$ et $B = \mathscr{C}(Y)$, de sorte que l'on ait (par 2.4) des homéomorphismes $ev_X : X \tilde{\to} \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ et $ev_Y : Y \tilde{\to} \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R})$. Si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, $\phi^* : \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ est continue, donc $w := ev_X^{-1} \circ \phi^* \circ ev_Y : Y \to X$ également. Par définition de w, on a pour tout $y \in Y$ et toute $f \in \mathscr{C}(X)$: $(\phi^* \circ ev_Y)(y)(f) = (ev_X \circ w)(y)(f)$, *i.e.* $\phi(f)(y) = f(w(y))$, soit $\phi(f) = f \circ w$. L'unicité de w est immédiate : le calcul précédent montre que $\phi = w^*$ équivaut à : $w = ev_X^{-1} \circ \phi^* \circ ev_Y$. $\square$

Remarque. En termes de catégories, le théorème 2.7 signifie que le foncteur contravariant $\mathscr{C}$: $\mathsf{EspComp} \to \mathsf{Alg}$ est *pleinement fidèle*, c'est-à-dire que, pour tous espaces compacts X, Y, l'application induite $\mathscr{C}_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(Y), \mathscr{C}(X))$ est bijective. En désignant par Alg' la sous-catégorie des algèbres réelles isomorphes à une algèbre $\mathscr{C}(X)$ pour un certain espace compact X, on en déduit que les foncteurs contravariants $\mathscr{C}$: $\mathsf{EspComp} \to \mathsf{Alg}'$ et $\mathscr{H}$: $\mathsf{Alg}' \to \mathsf{EspComp}$ forment une *dualité de catégories* (*i.e.* une équivalence entre une catégorie et la catégorie duale de l'autre).

Il serait encore plus satisfaisant de savoir caractériser algébriquement les objets de Alg', c'est-à-dire les algèbres de fonctions continues sur un espace compact. Ce n'est pas commode à effectuer dans le cas réel, car une telle algèbre doit vérifier plusieurs propriétés (elle est non intègre sauf si elle est égale à $\mathbf{R}$, une somme de carrés est un carré...).

On obtient en fait un dual « algébrique » de la catégorie des espaces compacts en considérant la catégorie des *C^*-algèbres commutatives*, étudiées en géométrie non commutative (voir, par exemple, [Con]).

2.2 Extension au cas localement compact

Nous allons expliquer ici brièvement comment généraliser aux espaces topologiques localement compacts les résultats précédemment établis dans le cas compact. Cette fois-ci, l'algèbre associée à un espace localement compact

X sera l'algèbre $\mathscr{C}_0(X)$ des fonctions continues sur X de limite nulle à l'infini, soit :

$$\mathscr{C}_0(X) = \{f \in \mathscr{C}(X) \,|\, \forall \varepsilon > 0,\, \exists K \subset X \text{ compact}, \forall x \in X \setminus K,\ |f(x)| < \varepsilon\}\,.$$

Dans le cas où X est compact, on a évidemment $\mathscr{C}_0(X) = \mathscr{C}(X)$. Notons également que l'algèbre $\mathscr{C}_0(X)$ est unitaire si et seulement si X est compact. Les morphismes d'algèbres *non unitaires* sont simplement les applications linéaires et multiplicatives.

Si X est un espace localement compact, le *compactifié d'Alexandroff* $\overline{X}$ de X est l'ensemble $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie constituée par les ouverts de X d'une part, et par les complémentaires dans $\overline{X}$ des compacts de X d'autre part. L'espace topologique $\overline{X}$ est compact, et l'application canonique $\iota : X \hookrightarrow \overline{X}$ est un plongement topologique. L'intérêt d'introduire $\overline{X}$ est que les fonctions continues sur X de limite nulle à l'infini correspondent exactement aux fonctions sur $\overline{X}$ nulle en ∞, comme on le vérifie immédiatement à partir des définitions :

Lemme 2.8. *Soit $\mathfrak{m}_\infty$ l'idéal (donc la sous-algèbre) de $\mathscr{C}(\overline{X})$ constitué des fonctions qui s'annulent au point ∞. La restriction à X induit un isomorphisme d'algèbres non unitaires $\mathfrak{m}_\infty \simeq \mathscr{C}_0(X)$.*

Rappelons que nous pouvons munir les espaces de morphismes d'algèbres (non unitaires) $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(X), \mathbf{R})$ et $\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\infty, \mathbf{R})$ de la topologie faible, de sorte que l'isomorphisme d'algèbres $\mathfrak{m}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_0(X)$ induit comme précédemment un homéomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(X), \mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\infty, \mathbf{R})$. Ce morphisme fait notamment correspondre les ev_x pour $x \in X$, ainsi que les morphismes nuls.

En outre, puique nous avons la décomposition en somme directe d'espaces vectoriels $\mathscr{C}(\overline{X}) = \mathbf{R}1 \oplus \mathfrak{m}_\infty$, et qu'un morphisme d'algèbres unitaires $\mathscr{C}(\overline{X}) \to \mathbf{R}$ est déterminé sur les constantes, nous pouvons énoncer :

Lemme 2.9. *La restriction des morphismes d'algèbres unitaires $\mathscr{C}(\overline{X}) \to \mathbf{R}$ à $\mathfrak{m}_\infty$ induit un homéomorphisme entre* $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}(\overline{X}), \mathbf{R})$ *et* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\infty, \mathbf{R})$*, qui envoie ev_∞ sur le morphisme nul $\mathfrak{m}_\infty \to \mathbf{R}$.*

Démonstration. Cette application est continue, car de la forme i^* où i : $\mathfrak{m}_x \to \mathscr{C}(\overline{X})$ est l'inclusion, qui est un morphisme d'algèbres. On peut construire explicitement sa réciproque $\Psi : \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\infty, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(\overline{X}), \mathbf{R})$, en prolongeant de manière unique un morphisme d'algèbre $\phi : \mathfrak{m}_x \to \mathbf{R}$ à $\mathscr{C}(\overline{X}) = \mathbf{R}1 \oplus \mathfrak{m}_x$ en posant $\phi(1) = 1$, ce qui est l'unique façon d'en faire un morphisme d'algèbres unitaires. On vérifie en utilisant la définition de la topologie faible que Ψ est continue, ce qui conclut. □

Enfin, comme $\overline{X}$ est compact, l'application $ev : \overline{X} \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}(\overline{X}), \mathbf{R})$ est un homéomorphisme par la proposition 2.4. On déduit de la remarque suivant le lemme 2.8, du lemme 2.9 et de ce dernier fait, que l'application $\overline{X} \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(X), \mathbf{R})$ qui à $x \in X$ associe ev_x, et à ∞ associe le morphisme nul, est un homéomorphisme. En particulier :

Proposition 2.10. *Si X est un espace topologique localement compact, l'application $ev : X \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(X), \mathbf{R}) \setminus \{0\}$ est un homéomorphisme.*

Corollaire 2.11. *Si X, Y sont deux espaces localement compacts tels que les algèbres $\mathscr{C}_0(X)$ et $\mathscr{C}_0(Y)$ soient isomorphes, alors X et Y sont homéomorphes.*

De plus, pour tout isomorphisme d'algèbres $\phi : \mathscr{C}_0(X) \to \mathscr{C}_0(Y)$, il existe un unique homéomorphisme $w : Y \to X$ tel que $\phi = w^* : f \mapsto f \circ w$.

Démonstration. Le premier point résulte immédiatement de 2.10. Pour le second, si ϕ est un isomorphisme d'algèbres, $\phi^* : \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(Y), \mathbf{R}) \setminus \{0\} \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}_0(X)) \setminus \{0\}$ est un homéomorphisme, donc par la proposition 2.10, $w := ev_X^{-1} \circ \phi^\star \circ ev_Y : Y \to X$ est un homéomorphisme. De plus, comme on l'a observé dans la preuve du théorème 2.7, $ev_X \circ w = \phi^\star \circ ev_Y$ équivaut à $\phi = w^*$. □

2.3 Algèbres de fonctions différentiables

Cette section adapte les résultats précédents au cas différentiable. Il s'agit à nouveau de retrouver les variétés (et les applications différentiables) à partir de la donnée algébrique de leur algèbre de fonctions lisses (et des morphismes entre ces algèbres). Dans ce qui suit, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ est l'ordre de différentiabilité.

Lemme 2.12. *Soit M une variété à bord, de classe $\mathscr{C}^r$ et compacte.*

1. *Les idéaux maximaux de $\mathscr{C}^r(M)$ sont exactement les $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{C}^r(M) \mid f(x) = 0\}$ avec $x \in M$.*
2. *Par conséquent, tout morphisme d'algèbres $\mathscr{C}^r(M) \to \mathbf{R}$ est de la forme $f \mapsto f(x)$ pour un unique $x \in M$.*
3. *Enfin, la bijection $ev : M \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}^r(M), \mathbf{R})$ ainsi induite est un homéomorphisme lorsque l'on munit $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^r(M), \mathbf{R})$ de la topologie faible.*

Démonstration. Le premier point se démontre exactement comme le lemme 2.1, en utilisant le fait que l'inverse d'une fonction $\mathscr{C}^r$ strictement positive est également de classe $\mathscr{C}^r$. Le second point en découle immédiatement.

Pour la preuve du troisième point, on procède comme dans le cas continu, en utilisant le fait que si V est un ouvert de M et $x \in V$, il existe (par partition de l'unité) une fonction $f \in \mathscr{C}^r(M)$ à support dans V telle que $f(x) = 1$, et l'ouvert $V' = f^{-1}(]\frac{1}{2}, +\infty[)$ vérifie alors $x \in V' \subset V$. Les fonctions $\mathscr{C}^r$ engendrent donc aussi la topologie de M. □

Le lemme 2.12 montre que la donnée de $\mathscr{C}^r(M)$ permet de retrouver l'ensemble M et sa topologie. Nous allons munir $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^r(M), \mathbf{R})$ d'une structure de variété définie à partir de l'algèbre $\mathscr{C}^r(M)$ qui fait de $ev : M \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}^r(M), \mathbf{R})$ un difféomorphisme.

Lemme 2.13. *Notons $A = \mathscr{C}^r(M)$. Il existe une unique structure $\mathscr{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ pour laquelle les fonctions $\mathscr{C}^r$ sont exactement les $\overline{ev}^f : \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ avec $f \in A$. De plus, pour cette structure, $ev : M \to \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. Puisque, comme on l'a observé dans la remarque suivant la proposition 2.4, $\overline{ev}^f \circ ev = f$ pour toute $f \in A$, et puisque ev est un homéomorphisme, il suffit par transport de montrer qu'il existe une unique structure $\mathscr{C}^r$ sur l'espace topologique M, soit $\mathscr{S}$, pour laquelle les fonctions $\mathscr{C}^r$ soient exactement les éléments de A. Puisque la structure $\mathscr{C}^r$ initiale de M vérifie cette propriété, il s'agit d'elle, ce qui implique que ev est un difféomorphisme.

Soient $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ deux telles structure $\mathscr{C}^r$ sur l'espace topologique M. Soit $U \subset M$ un ouvert de cartes à la fois pour $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ (quitte à prendre une intersection), et $\phi_1, \phi_2 : U \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ les cartes correspondantes. Soit V un ouvert de M tel que $\overline{V} \subset U$, et $\chi \in A$ à support dans U qui vaut 1 au voisinage de V. Notons $\phi_j = (\phi_j^i)_i$ les coordonnées pour $j = 1, 2$. Pour tout i, $\chi\phi_2^i : M \to \mathbf{R}$ est $\mathscr{C}^r$ pour $\mathscr{S}_2$, donc appartient à A, donc est $\mathscr{C}^r$ pour $\mathscr{S}_1$. Ainsi $\phi_2|_V = \chi\phi_2|_V$ est $\mathscr{C}^r$ pour $\mathscr{S}_1$, et donc $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}|_{\phi_1(V)} : \phi_1(V) \to \phi_2(V)$ est $\mathscr{C}^r$ entre ouverts de $\mathbf{R}^n$. Par symétrie des rôles de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}|_{\phi_2(V)}$ est également $\mathscr{C}^r$, donc est un difféomorphisme. $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ coïncident donc sur V, ce qui conclut. □

Corollaire 2.14. *Si M et N sont deux variétés $\mathscr{C}^r$ compactes telles que les algèbres $\mathscr{C}^r(M)$ et $\mathscr{C}^r(N)$ soient isomorphes, alors M et N sont $\mathscr{C}^r$-difféomorphes.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal résultat de cette partie, qui apporte une caractérisation géométrique simple des morphismes d'algèbres $\mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(N)$.

Théorème 2.15. *Soient M et N deux variétés $\mathscr{C}^r$ compactes. Pour tout morphisme d'algèbres $\phi : \mathscr{C}^r(M) \to \mathscr{C}^r(N)$, il existe une unique application $w : N \to M$ de classe $\mathscr{C}^r$ telle que $\phi(f) = f \circ w$ pour toute $f \in \mathscr{C}^r(M)$.*

Ainsi, si $\phi : \mathscr{C}^r(M) \to \mathscr{C}^r(N)$ est un isomorphisme d'algèbres, il existe un unique $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $w : M \to N$ tel que $\phi(f) = f \circ w^{-1}$ pour toute $f \in \mathscr{C}^r(M)$. En particulier, $\mathrm{Aut}\,\mathscr{C}^r(M) \simeq \mathrm{Diff}^r(M)$.

Dans la preuve, nous utilisons ce petit lemme sans difficulté :

Lemme 2.16. *Soient M_1, M_2 deux variétés $\mathscr{C}^r$. Une fonction continue $\phi : M_1 \to M_2$ est de classe $\mathscr{C}^r$ si et seulement si $f \circ \phi \in \mathscr{C}^r(M_1)$ pour tout $f \in \mathscr{C}^r(M_2)$.*

Démonstration du lemme. Le sens direct est immédiat ; pour la réciproque, on peut prolonger une carte locale $\theta = (\theta^i)_i$ en n fonctions $\tilde{\theta}_i \in \mathscr{C}^r(M_2)$ comme dans la preuve de 2.13 ; $\tilde{\theta}_i \circ \phi \in \mathscr{C}^r(M_1)$ pour tout i, donc $\theta \circ f$ est $\mathscr{C}^r$, ce qui conclut. □

Preuve du théorème 2.15. Soient $A = \mathscr{C}^r(M)$, $B = \mathscr{C}^r(N)$, et $\phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres. Montrons que l'application $\phi^* : \mathrm{Hom}(B, \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbf{R})$ est de classe $\mathscr{C}^r$. Elle est continue, car $(\phi^*)^{-1}(\mathscr{O}_{f,U}) = \mathscr{O}_{\phi(f),U}$ pour $f \in A$ et $U \subseteq \mathbf{R}$ ouvert. De plus, pour tout $f \in A$, on a $\overline{ev}^f \circ \phi^* = \overline{ev}^{\phi(f)}$ qui est de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathrm{Hom}(B, \mathbf{R})$, donc par le lemme 2.16, ϕ^* est $\mathscr{C}^r$.

Comme ev est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme par 2.13, on en déduit que $w = ev_M^{-1} \circ \phi^* \circ ev_N$ est également de classe $\mathscr{C}^r$. En outre, par définition de w, pour tout $p \in N$ et toute $f \in \mathscr{C}^r(M)$, $(\phi^* ev)(p)(f) = ev_{w(p)}(f)$, *i.e.* $\phi(f)(p) = f \circ w(p)$, ce qui conclut (comme dans le cas continu, l'unicité de w provient de ce que $w = ev_M^{-1} \circ \phi^* \circ ev_N$ équivaut comme on vient de le voir à $\phi = w^*$). □

Chapitre 3

Morphismes continus entre groupes de difféomorphismes

Dans cette section, nous allons entamer l'étude des groupes de difféomorphismes des variétés, en établissant certaines de leurs propriétés fondamentales, notamment la propriété de fragmentation. Nous en venons ensuite à la classification des morphismes faiblement continus (une notion que l'on définira) $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ dans le cas où $\dim(M) \geqslant \dim(N)$ et N compacte, en prouvant qu'ils sont *topologiquement diagonaux étendus* (théorème 1.2).

3.1 Le groupe $\mathrm{Diff}_c(M)$

3.1.1 Topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X,Y)$ et $\mathrm{Homeo}(X)$

Rappelons d'abord brièvement la construction et les principales propriétés de la topologie compacte-ouverte, qui est une topologie sur les ensembles de fonctions continues correspondant à la convergence uniforme sur les compacts. Cette sous-section est une étape vers la suivante, qui traite de la régularité différentiable.

Définition 3.1. Soient X, Y deux espaces topologiques, avec X localement compact. La *topologie compacte-ouverte* sur $\mathscr{C}(X,Y)$ est la topologie engendrée par les parties de la forme :

$$\mathscr{O}(K,U) = \{f \in \mathscr{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$$

avec $K \subset X$ compact et $U \subset Y$ ouvert.

Cette topologie possède des propriétés commodes (voir [Pau]), qui se démontrent de manière élémentaire en utilisant la compacité locale de X :

Proposition 3.2. *La topologie compacte-ouverte vérifie les propriétés suivantes :*

1. *L'application d'évaluation* $\mathscr{C}(X,Y) \times X \to Y$ *est continue.*
2. *Si* Z *est un espace topologique, une application* $f : Z \to \mathscr{C}(X,Y)$, $z \mapsto f_z$ *est continue si et seulement si l'application* $Z \times X \to Y$, $(z,x) \mapsto f_z(x)$ *est continue. En particulier, les chemins* $[0,1] \to \mathscr{C}(X,Y)$ *correspondent exactement aux homotopies* $[0,1] \times X \to Y$.
3. *Si* Z *est un espace topologique localement compact, l'application de composition* $\mathscr{C}(Z,X) \times \mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}(Z,Y)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$ *est continue.*

En outre, la propriété suivante assure que la topologie compacte-ouverte « topologise » bien la notion de convergence uniforme sur les compacts (et la généralise au cas où Y est non métrisable) :

Proposition 3.3. *Supposons que* Y *soit un espace métrique, de distance* d. *La topologie compacte-ouverte coïncide avec la topologie sur* $\mathscr{C}(X,Y)$ *engendrée par la famille de pseudo-distances :*

$$d_K(f,g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

lorsque K *parcourt les compacts de* X, *c'est-à-dire la topologie engendrée par les parties de la forme* $B_K(f,\varepsilon)$ *avec* K *compact et* $\varepsilon > 0$. *En particulier, si* X *est compact, la topologie compacte-ouverte sur* $\mathscr{C}(X,Y)$ *est métrisable, et coïncide avec la topologie de la convergence uniforme.*

Par conséquent, une suite $f_n \in \mathscr{C}(X,Y)$ *converge vers* $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ *pour la topologie compacte-ouverte si et seulement si* f_n *converge uniformément vers* f *sur tout compact.*

Soit maintenant X un espace topologique localement compact. On peut alors munir le groupe $G = \mathrm{Homeo}(X)$ de la topologie compacte-ouverte, pour laquelle la composition $G \times G \to G$ est continue par 3.2. On peut alors se demander si cette topologie fait de G un groupe topologique, *i.e.* si l'application inverse $f \mapsto f^{-1}$ est continue. Ce n'est pas le cas en général, mais c'est le cas lorsque X est compact :

Proposition 3.4. *Si* X *est un espace topologique compact, l'application* $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(X)$, $f \mapsto f^{-1}$ *est continue pour la topologie compacte-ouverte. Par conséquent,* $\mathrm{Homeo}(X)$ *est un groupe topologique.*

Démonstration. Pour $f \in \mathrm{Homeo}(X)$, $K \subset X$ compact et $U \subset X$ ouvert, $\mathrm{inv}(f) := f^{-1}$ appartient à $\mathscr{O}(K,U)$ si et seulement si $f^{-1}(K) \subset U$, *i.e.*

$f(X \setminus U) \subset X \setminus K$. Or $X \setminus K$ est ouvert et $X \setminus U$ est fermé donc (par compacité de X) compact, ceci équivaut donc à : $f \in \mathscr{O}(X \setminus U, X \setminus K)$ qui est ouvert, ce qui conclut. $\square$

Pour la suite, on retiendra surtout cette conséquence des propriétés 3.3 et 3.4 :

Corollaire 3.5. *Soit X un espace localement compact,* $\mathrm{Homeo}_c(X)$ *le groupe des homéomorphismes de X à support compact muni de la topologie compacte-ouverte, et* $\mathrm{Homeo}_K(X)$ *le sous-groupes des homéomorphismes à support dans le compact $K \subset X$. La topologie induite sur* $\mathrm{Homeo}_K(X)$ *en fait un groupe topologique métrisable.*

3.1.2 Topologie faible sur $\mathscr{C}^r(M,N)$ et sur $\mathrm{Diff}^r(M)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$

Cette sous-section adapte au cas différentiable la topologie compacte-ouverte (qui correspond à la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur les compacts). Pour une étude plus détaillée de ces espaces de fonctions, on pourra se référer à [Hir].

Définition 3.6. Soient M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^r$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. La *topologie faible* sur $\mathscr{C}^r(M,N)$ est la topologie engendrée par les parties de la forme :

$$\mathscr{O}_k(f,(U,\phi),(V,\psi),K,\varepsilon) = \\ \{g \in \mathscr{C}^r(M,N) \,|\, g(K) \subset V,\ \ \|\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi \circ g \circ \phi^{-1}\|_{\mathscr{C}^k(\phi(K),\mathbf{R}^n)} < \varepsilon\}$$

avec $k \in \mathbf{N}$, $k \leqslant r$, $\varepsilon > 0$, (U,ϕ) et (V,ψ) des cartes de M et N respectivement, $K \subset U$ un compact, et $f \in \mathscr{C}^r(M,N)$ telle que $f(K) \subset V$.

Dans ce texte, on prendra parfois la liberté d'appeler la topologie faible « topologie $\mathscr{C}^r$ », car il s'agit de la seule topologie que nous considérerons sur les espaces de fonctions différentiables et sur les difféomorphismes.

Proposition 3.7. *La topologie faible vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si P est une variété et $f : P \times M \to N$ est une application de classe $\mathscr{C}^r$, alors l'application induite $f : P \to \mathscr{C}^r(M,N)$, $p \mapsto f(p,\cdot)$ est continue. En particulier, toute homotopie $\mathscr{C}^r$ par rapport aux deux variables $[0,1] \times M \to N$ induit un chemin continu $[0,1] \to \mathscr{C}^r(M,N)$.*
2. *La composition d'applications $\mathscr{C}^r(P,M) \times \mathscr{C}^r(M,N) \to \mathscr{C}^r(P,N)$ est continue.*

3. *Si M est compacte, la topologie faible sur $\mathscr{C}^r(M,N)$ est métrisable.*
4. *Si M est compacte, l'application inverse $\mathrm{Diff}^r(M) \to \mathrm{Diff}^r(M)$ est continue pour la topologie faible.*

Principe de la démonstration. Le premier point se démontre en passant dans une carte, puis en observant que les dérivées partielles par rapport à x d'une application de classe $\mathscr{C}^r$, $(p,x) \mapsto f(p,x)$, dépendent continûment de p, donc uniformément continûment sur les compacts.

Le second s'obtient en contrôlant les dérivées partielles d'une composée, en les exprimant (par récurrence) comme une somme de produits des dérivées partielles des fonctions que l'on compose.

Pour le troisième, on commence par plonger N dans un espace euclidien $\mathbf{R}^d$, comme le permet le théorème de Whitney 5.1, rappelé dans la partie 5. On recouvre ensuite M, qui est compacte, par un nombre fini de compacts K_i inclus dans une carte (U_i, ϕ_i). On pose alors, pour $f, g \in \mathscr{C}^r(M,N)$:

$$d(f,g) = \sum_i \sum_{k \leqslant r} 2^{-k} \min(1, \|f \circ \phi_i^{-1} - g \circ \phi_i^{-1}\|_{\mathscr{C}^k(\phi_i(K_i))})$$

qui métrise bien la topologie faible sur $\mathscr{C}^r(M,N)$.

Pour le dernier point, on utilise d'une part la proposition 3.4 (cas continu) pour le contrôle continu de $f \mapsto f^{-1}$; pour le contrôle des dérivées partielles, on utilise le fait que $D(f^{-1}) = D(f)^{-1}$, et que l'inverse $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ est $\mathscr{C}^\infty$. □

Si M est une variété, on note $\mathrm{Diff}^r_c(M)$ l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes isotopes à l'identité par une isotopie à support compact, et $\mathrm{Diff}^r_K(M)$ le sous-groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité par une isotopie à support dans K. Une conséquence importante de ce qui précède est le résultat suivant :

Corollaire 3.8. *Si M est une variété différentiable de classe $\mathscr{C}^r$, pour tout compact $K \subset M$, le groupe $\mathrm{Diff}^r_K(M)$, muni de la topologie faible, est un groupe topologique connexe et métrisable.*

Dans ce qui suit, lorsque l'on considérera des familles de difféomorphismes à support dans un même compact K, on désignera par d une distance qui métrise la topologie faible sur $\mathrm{Diff}^r_K(M)$. Ainsi, si (h_n) est une suite de $\mathrm{Diff}^r_c(M)$ à support dans un même compact $K \subset M$, et $h \in \mathrm{Diff}^r_K(M)$, $d(h_n, h) \to 0$ signifie que h_n tend vers h pour la topologie $\mathscr{C}^r$ sur K.

Avant de conclure cette section, énonçons un résultat bien commode dont nous nous servirons souvent par la suite. La preuve est inspirée de [Hir].

Proposition 3.9. *Si M est une variété compacte, l'ensemble* $\mathrm{Diff}^r(M)$ *des* $\mathscr{C}^r$*-difféomorphismes de M est ouvert dans* $\mathscr{C}^r(M,M)$ *pour la topologie faible.*

Démonstration. Puisque, pour tout $h \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $L_{h^{-1}} : f \mapsto h^{-1} \circ f$ est un homéomorphisme de $\mathscr{C}^r(M,M)$ par 3.7, il suffit de montrer que tout $f \in \mathscr{C}^r(M,M)$ suffisamment proche de id est un difféomorphisme. Si f est suffisamment proche de id, il préserve chacune des composantes connexes de M (en nombre fini), on peut donc supposer dans ce qui suit que M est connexe.

1. Si f est suffisamment proche de id*, c'est un difféomorphisme local.* En effet, sur tout compact K de carte (U, ϕ), si $\|\phi \circ f \circ \phi^{-1} - \mathrm{id}\|_{\mathscr{C}^1(K)}$ est assez petit, on a $\|D(\phi \circ f \circ \phi^{-1})(x) - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}\|_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon$ en tout $x \in \phi(K)$, donc pour ε assez petit, $D(\phi \circ f \circ \phi^{-1})$ (resp. $D(f)$) est inversible en tout point de $\phi(K)$ (resp. K). En recouvrant M par un nombre fini de compacts de carte, on en déduit que si f est assez proche de id, $D(f)$ est inversible en tout point de M, donc est un difféomorphisme local par le théorème d'inversion locale.

2. Si f est suffisamment proche de id*, f est surjectif.* En effet, si f est suffisamment proche de l'identité, f est un difféomorphisme local, donc son image $f(M)$ est ouverte. De plus, $f(M)$ est compacte car M l'est, et est donc fermée. Or M est connexe, donc $f(M) = M$.

3. Si f est proche de l'identité, il est injectif. Munissons M d'une distance qui métrise sa topologie. Sur tout compact de carte $K \subset (U, \phi)$, on a pour f suffisamment proche de id en norme $\mathscr{C}^1$: $f(K) \subset U$ et $f' = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ vérifie $\|D(f' - \mathrm{id})_x v\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \|v\|$ et pour tout $x \in \phi(K)$ et $v \in \mathbf{R}^n$, d'où pour tous x, h, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f'(x+h) - f'(x) - h\| = \|(f' - \mathrm{id})(x+h) - (f' - \mathrm{id})(x)\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \|h\|$$

donc $\|f'(x+h) - f'(x)\| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \|h\| > 0$ si $h \neq 0$, donc $f'|_{\phi(K)}$ est injectif, *i.e.* $f|_K$ est injectif.

Soit (K_i) des compacts de carte en nombre fini dont les intérieurs recouvrent M, et $\delta > 0$ un nombre de Lebesgue associé à ce recouvrement ouvert (*i.e.* si $d(x,y) < \delta$, x, y appartiennent à un même $\mathring{K}_i$). Si f est suffisamment proche de id, par ce qui précède $f|_{K_i}$ est injectif pour tout i, donc pour tous $x \neq y$ dans M tels que $d(x,y) < \delta$, on a $f(x) \neq f(y)$. Si de plus $d_\infty(f, \mathrm{id}) = \sup_{x \in M} d(f(x), x) < \frac{\delta}{3}$, on a pour tous x, y dans M tels que $d(x,y) \geqslant \delta$:

$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y) - d(x, f(x)) - d(y, f(y)) \geqslant \delta - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3} > 0$$

donc $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, f est injective.

Si f est suffisamment proche de id, f est un difféomorphisme local surjectif et injectif, donc un difféomorphisme. $\square$

À partir de maintenant, toutes les variétés et tous les difféomorphismes considérés sont supposés de classe $\mathscr{C}^\infty$. On note alors $\mathrm{Diff}_c(M) = \mathrm{Diff}_c^\infty(M)$.

3.1.3 Fragmentation sur $\mathrm{Diff}_c(M)$

Soit M une variété $\mathscr{C}^\infty$. Le groupe $\mathrm{Diff}_c(M)$ possède une propriété cruciale, que nous exploiterons dans la classification des morphismes continus : la propriété de *fragmentation.*

Définition 3.10. Si U est un ouvert de M, on note G_U l'ensemble des éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans U.

Proposition 3.11 (Fragmentation)**.** *Soit $\mathscr{B}$ un recouvrement ouvert de M, et soit $\mathscr{C} = \{f \in \mathrm{Diff}_c(M) \,|\, \exists B \in \mathscr{B},\ \mathrm{supp}(f) \subset B\}$. Alors, le groupe $\mathrm{Diff}_c(M)$ est engendré par $\mathscr{C}$. Plus précisément, pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ suffisamment proche de l'identité, il existe $B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{B}$ et $f_1, \ldots, f_m$ avec $f_i \in G_{B_i}$ proches de l'identité tels que $f = f_1 \cdots f_m$.*

Démonstration. Commençons par observer que le second point implique le premier : en effet, $\mathrm{Diff}_c(M) = \bigcup_K \mathrm{Diff}_K(M)$ (la réunion portant sur tous les compacts $K \subset M$), et chaque $\mathrm{Diff}_K(M)$ est un groupe topologique connexe, donc engendré par tout voisinage de l'identité. Si donc le sous-groupe engendré par $\mathscr{C}$ contient tous les difféomorphismes proches de l'identité, il est égal à $\mathrm{Diff}_c(M)$ tout entier.

Soit K un compact de M. Commençons par montrer que si $f \in \mathrm{Diff}_K(M)$ est suffisamment proche de l'identité, il existe une isotopie f^t proche de l'identité telle que $f^0 = \mathrm{id}$ et $f^1 = f$. Munissons M d'une métrique quelconque ; on pose pour tout $t \in [0,1]$ et $p \in M$:

$$f^t(p) := \exp_p(t \exp_p^{-1} f(p)) \,, \tag{3.1}$$

qui est bien défini si f est suffisamment proche de l'identité car l'exponentielle est un difféomorphisme local en tout point, et car $f(p) = p$ sauf sur le compact K. De plus, $(t,p) \mapsto f^t(p)$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ car l'exponentielle est un difféomorphisme local. Enfin, f^t dépend continûment de f (pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$), donc si f est suffisamment proche de id, $f^t \in \mathscr{C}^\infty(M,M)$ est également proche de id pour tout t.

Soient maintenant $B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{B}$ qui recouvrent K, et $\chi, \chi_1, \ldots, \chi_m$ une partition lisse de l'unité associée au recouvrement ouvert $\{K^c, B_1, \ldots, B_m\}$ de M, de sorte que $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset B_i$, $\chi_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^m \chi_i \leqslant 1$ avec égalité au voisinage de K. On pose, pour $1 \leqslant k \leqslant m$, $\mu_k := \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \chi_j$, et $f_k(x) := f^{\mu_k(x)}(x)$ pour $x \in M$. f_k est clairement $\mathscr{C}^\infty$; de plus, $f_k = f^{\mu_k}$ dépend continûment de f, donc si f est suffisamment proche de l'identité, f_k est proche de id pour $1 \leqslant k \leqslant m$, donc par la proposition 3.9 $f_k \in \mathrm{Diff}_K(M)$ pour tout k.

Comme $\mu_m = 1$ au voisinage de K, on a $f = f_m$. En posant $h_1 = f_1$ et $h_k = f_{k-1}^{-1} \circ f_k$ pour $2 \leqslant k \leqslant m$, qui dépendent continûment de f, on a donc $f = h_1 \cdots h_m$. De plus, $\mathrm{supp}(h_1) \subset \mathrm{supp}(\chi_1) \subset B_1$, et pour $2 \leqslant k \leqslant m$, $f_{k-1} = f_k$ en dehors de $\mathrm{supp}(\chi_k)$, donc $\mathrm{supp}(h_k) \subset \mathrm{supp}(\chi_k) \subset B_k$. On a donc montré que si $f \in \mathrm{Diff}_K(M)$ est proche de l'identité, il existe $h_k \in \mathrm{Diff}_{B_k}(M)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ proches de l'identité tels que $f = h_1 \cdots h_m$, ce qui conclut. □

Remarque. La formule (3.1) permet de construire, étant donné $f \in \mathrm{Diff}(M)$ suffisamment proche de l'identité, une homotopie lisse entre id et f qui est proche de l'identité, donc dans $\mathrm{Diff}(M)$ (par ouverture de $\mathrm{Diff}(M)$ dans $\mathscr{C}^\infty(M, M)$, cf. 3.9), ce qui montre que $\mathrm{Diff}_c(M)$ est ouvert dans $\mathrm{Diff}(M)$ (et dans $\mathscr{C}^\infty(M, M)$). Ceci montre également que $\mathrm{Diff}_c(M)$ est localement connexe par arcs.

La propriété de fragmentation, qui permet de décomposer une transformation en des transformations plus « petites », est un outil fondamental dans l'étude des groupes de difféomorphismes (voir [Ban, Bou]). Cette propriété est également vérifiée par le groupe $\mathrm{Homeo}_0(M)$ des homéomorphismes à support compacts isotopes à l'identité, quoique la preuve soit plus difficile. Dans le cas continu comme dans le cas différentiable – quoique cela soit bien plus facile dans le cas continu – on en déduit que les groupes de transformations sont *parfaits* (tout élément est un produit de commutateurs), puis qu'ils sont simples (théorèmes de Hermann et Thurston-Mather).

Nous allons de notre côté utiliser la propriété de fragmentation dans la preuve de la continuité des morphismes de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, afin de nous ramener au cas où la variété M est une boule ouverte (*via* le lemme 3.15), donc $M \simeq \mathbf{R}^n$.

Établissons enfin une propriété de l'action de $\mathrm{Diff}_c(M)$ sur l'ensemble des *boules* de M. Par définition, une boule de M est une partie de M de la forme $\phi^{-1}(B)$, où $\phi : U \subset M \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^n$ est une carte et $B \subset \mathbf{R}^n$ une boule usuelle. De manière équivalente, une boule est l'intérieure d'une boule fermée de M, c'est-à-dire d'une partie de M difféomorphe à $\overline{B}(0, 1) \subset \mathbf{R}^n$.

Lemme 3.12. *Soient B_1, B_2 deux boules de la variété M connexe. Il existe $\phi \in \mathrm{Diff}_c(M)$ tel que $\phi(B_1) \subset B_2$.*

Démonstration. La preuve procède en deux étapes étapes : on établit la transitivité de l'action de $\mathrm{Diff}_c(M)$ sur M, puis on établit le résultat pour deux boules qui se rencontrent.

Pour montrer que l'action de $\mathrm{Diff}_c(M)$ sur M est transitive, il suffit de montrer que ses orbites sont ouvertes (car alors elles sont aussi fermées, donc égales à M par connexité). Soit $x \in M$, on veut montrer que $\mathrm{Diff}_c(M) \cdot x$ contient un voisinage de x. Via une carte locale en x, on sa ramène au cas $M = \mathbf{R}^n$ et $x = 0$. Soit $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à support dans $\overline{B}(0,2)$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de $\overline{B}(0,1)$. Pour tout $y \in B(0,1)$, on définit le champ de vecteurs $X_y(z) = \chi(z)y$ pour $z \in \mathbf{R}^n$, et son flux ϕ_y^t. Alors ϕ_y^1 est à support dans $\overline{B}(0,2)$ et $\phi_y^1(0) = y$, ce qui conclut.

Soient maintenant B_1, B_2 deux boules ayant un point en commun x. Montrons qu'il existe $\phi \in \mathrm{Diff}_c(M)$ tel que $\phi(B_1) \subset B_2$; il suffit de montrer que pour tout voisinage V de x, il existe $\phi \in \mathrm{Diff}_c(M)$ tel que $\phi(B_1) \subset V$. En se plaçant dans une carte contenant $\overline{B}_1$, on se ramène au cas où $M = \mathbf{R}^n$, $x = 0$, et $\overline{B}_1 \subset \overline{B}(0,K)$. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ qui vaut 1 au voisinage de $\overline{B}(0,K)$, $X(z) = -\chi(z)z$ pour $z \in \mathbf{R}^n$, et ϕ^t le flux de X. Alors pour tout t, $\phi^t \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n)$, et $\phi^t(B_1) \subset \phi^t(\overline{B}(0,K)) = \overline{B}(0, Ke^{-t})$, donc pour tout voisinage V de 0, il existe t tel que $\phi^t(B_1) \subset V$.

Enfin, si B_1, B_2 sont deux boules quelconques de M, on conclut immédiatement à partir des deux cas précédents. □

3.2 Classification des morphismes faiblement continus

Dans ce qui suit, on suppose que M et N sont deux variétés lisses, avec N compacte et $\dim(M) \geqslant \dim(N)$. Notons que, par compacité de N, $\mathrm{Diff}_c(N)$ est simplement le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité.

Il s'agit dans cette section de montrer que si un morphisme non trivial $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, vérifie une propriété de continuité (la continuité faible, que l'on définira plus bas) alors $\dim(M) = \dim(N)$, puis de classifier les morphismes faiblement continus dans le cas où $\dim(M) = \dim(N)$.

3.2.1 Définition et premières propriétés

Nous allons introduire une notion de continuité pour les morphismes de groupes de difféomorphismes, davantage adaptée à notre problème, et qui est plus faible *a priori* que la continuité pour la topologie $\mathscr{C}^r$ dans le cas où M est non compacte.

Définition 3.13 (Faible continuité)**.** Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupe. On dit que Φ est *faiblement continu* s'il vérifie la propriété suivante : pour toute suite f_n de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans un même compact telle $f_n \to \mathrm{id}$, on a $\Phi(f_n) \to \mathrm{id}$.

Comme, par le corollaire 3.8, $\mathrm{Diff}_K(M)$ est un groupe topologique métrisable (pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$), et, comme N est compacte, $\mathrm{Diff}_c(N)$ l'est également. Par la caractérisation séquentielle de la continuité dans les espaces métriques, un morphisme de groupes, on a le résultat suivant :

Proposition 3.14. *Un morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu si et seulement si, pour tout compact $K \subset M$, la restriction $\Phi_K : \mathrm{Diff}_K(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est continue.*

De manière équivalente, Φ est faiblement continu si et seulement si Φ est continu lorsque l'on munit $\mathrm{Diff}_c(M)$ de la topologie induite par les inclusions $\mathrm{Diff}_K(M) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_c(M)$ (c'est-à-dire la topologie la plus fine rendant toutes ces applications continues).

La propriété de continuité faible, plus faible a priori que la continuité – mais équivalente si M est compacte –, suffit à classifier tous les morphismes qui la vérifient, tandis qu'elle est plus facile à établir pour un morphisme quelconque. Dans tout ce qui suit, nous emploierons toujours le terme « continu » pour « continu en topologie $\mathscr{C}^\infty$ », à distinguer de « faiblement continu ».

Nous allons maintenant utiliser la propriété de fragmentation afin de montrer que, pour établir la semi-continuité d'un morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, il suffit de l'établir sur une boule quelconque de M.

Proposition 3.15. *Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes. S'il existe une boule ouverte $B_0 \subset M$ telle que la restriction de Φ à G_{B_0} soit continue, alors Φ est faiblement continu.*

Notons, quoique nous ne l'utiliserons pas, que la réciproque est vraie : si Φ est faiblement continu, pour toute boule B de M, $\overline{B}$ est compact, donc la restriction de Φ à $\mathrm{Diff}_{\overline{B}}(M) \supset G_B$ est continue.

Démonstration. Soit $B_0 \subset M$ une boule de M telle que la restriction de Φ à G_{B_0} soit continue. Pour toute boule B de M, il existe par le lemme 3.12 un $\phi \in \mathrm{Diff}_c(M)$ tel que $\phi(B) \subset B_0$. La restriction de Φ à $\phi G_B \phi^{-1} = G_{\phi(B)} \subset G_{B_0}$ est donc continue, donc par continuité de la conjugaison et par le fait que Φ est un morphisme de groupes, la restriction de Φ à G_B est continue.

Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des boules de M, qui est un recouvrement ouvert de M. Soit également f_n une suite de $\mathrm{Diff}_c(M)$, à support dans un même compact K, qui tend vers l'identité. Par le lemme de fragmentation 3.11, comme $f_n \to \mathrm{id}$, il existe des boules $B_1, \ldots, B_m$ recouvrant K et, pour n assez grand, des éléments $f_n^1, \ldots, f_n^m$ avec $f_n^k \in G_{B_k}$ convergeant vers l'identité pour tout k, tels que $f_n = f_n^1 \cdots f_n^m$. Comme on a montré que, pour tout $B \in \mathscr{B}$, la restriction de Φ à G_B est continue, c'est vrai en particulier pour $B_1, \ldots, B_m$, donc $\Phi(f_n^k) \to \mathrm{id}$ pour tout k, donc $\Phi(f_n) = \Phi(f_n^1) \cdots \Phi(f_n^m) \to \mathrm{id}$. □

Dans toute cette partie, nous supposons que Φ est faiblement continu, et nous allons chercher à montrer que Φ provient d'une construction géométrique entre les variétés.

On peut se convaincre du fait que la propriété de continuité faible est très contraignante de la façon suivante : $\mathrm{Diff}_c(M)$ est un groupe topologique, qui peut être vu comme une variété différentiable de dimension infinie, d'algèbre de Lie l'espace $\mathfrak{X}_c(M)$ des champs de vecteurs à support compact sur M. Or, tout morphisme de groupe continu entre groupes de Lie de dimension finie est lisse, et même déterminé (si les groupes sont connexes) par le morphisme qu'il induit entre les algèbres de Lie.

Un analogue de ce résultat de régularité des morphismes continus au cas de $\mathrm{Diff}_c(M)$ est le théorème classique de Montgomery-Zippin (cf. [MZ] pour une preuve), qu'exploite notamment Filipkiewicz [Fil] pour montrer que $\mathrm{Diff}(M)$ caractérise M.

Théorème 3.16 (Montgomery, Zippin)**.** *Soit G un groupe de Lie de dimension finie, et $\Phi : G \to \mathrm{Diff}_c(M)$ un morphisme de groupes continu. Alors l'application induite $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto \Phi(g)x$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

À partir de ce résultat, nous allons pouvoir montrer que Φ agit sur les flux (à support compact). L'étude de cette action est fondamentale : en effet, les flux correspondent aux champs de vecteurs à support compact sur M, c'est-à-dire à l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}_c(M)$. Pour montrer que Φ envoie un flux sur un flux, on va utiliser le fait que les flux sont exactement les groupes à un paramètre de $\mathrm{Diff}_c(M)$ [1], ce qui découle immédiatement du théorème

1. À nouveau, il s'agit d'un analogue du fait que les groupes à un paramètre d'un groupe de Lie G de dimension finie sont exactement les $t \mapsto \exp(t\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{g}$.

de Montgomery-Zippin :

Proposition 3.17. *L'application qui à un champs de vecteurs* $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ *associe son flux* $\phi_X : \mathbf{R} \times M \to M$ *est une bijection de* $\mathfrak{X}_c(M)$ *sur l'ensemble des actions lisses de* $\mathbf{R}$ *sur* M *à support compact, qui correspond lui-même à l'ensemble des morphismes continus* $\mathbf{R} \to \mathrm{Diff}_c(M)$.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est classique et facile : il suffit de prendre, pour réciproque, la fonction qui à une action lisse à support compact $\phi : \mathbf{R} \times M \to M$ associe le champ $X(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \phi(t, p)$. La seconde est une conséquence du théorème 3.16. □

Corollaire 3.18. *Si* X *est un champ de vecteurs sur* M *à support compact, de flux* f_t*, alors* $\Phi(f_t)$ *est un flux de* $\mathrm{Diff}_c(N)$ *engendré par un champs de vecteurs* Y *sur* N.

Démonstration. Si X est à support dans K, l'application $t \mapsto f_t$ est un morphisme continu de $\mathbf{R}$ vers $\mathrm{Diff}_K(M)$. Or Φ est faiblement continu, donc par 3.14 $\Phi : \mathrm{Diff}_K(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est un morphisme de groupes continu. Par composition, $t \mapsto \Phi(f_t)$ est alors un morphisme continu $\mathbf{R} \to \mathrm{Diff}_c(N)$, donc par la proposition 3.17 est un flux engendré par un champs de vecteurs Y sur N. □

3.2.2 Deux constructions fondamentales : morphismes induits par des plongements et par des revêtements

Nous définissons puis étudions dans cette partie deux façons fondamentales de construire des morphismes de groupes (continus) $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ lorsque $\dim(M) = \dim(N)$, l'une à partir d'un nombre fini de plongements $M \hookrightarrow N$, l'autre à partir d'un revêtement $N \to M$ sous certaines conditions.

Morphismes topologiquement diagonaux

Définition 3.19. Un morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est dit *topologiquement diagonal* s'il existe un nombre fini d'ouverts U_i de N $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et des difféomorphismes $\rho_i : M \xrightarrow{\sim} U_i$ tels que, pour $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$:

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \rho_i \circ f \circ \rho_i^{-1}(x) & \text{si } x \in U_i \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Un exemple typique de morphisme topologiquement diagonal est fourni par le cas où $M = \mathbf{R}^n$ et $U_1, \ldots, U_m$ sont des ouverts de cartes de N.

Remarque. S'il est facile de voir que (3.2) définit un morphisme de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, il est à noter que cette construction ne s'étend pas au cas où l'on a une infinité de U_i [2]. En effet, soit $x_0 \in M$, et $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ telle que $f(x_0) = x_0$ et $D(f)(x_0) = 2\,\mathrm{id}$; montrons par l'absurde que l'homéomorphisme $f' = \Phi(f)$ défini par (3.2) n'est pas $\mathscr{C}^1$. N étant compacte, la suite $y_i = \rho_i(x_0)$ admet une sous-suite convergeant vers $y \in N$. On a pour tout i, $D(f')(y_i) = 2\,\mathrm{id}$, d'où en prenant la limite sur la sous-suite, si f' est $\mathscr{C}^1$: $D(f')(y) = 2\,\mathrm{id}$. Mais ceci contredit le fait qu'il existe un suite de point fixes de f' tendant vers y, qui découle de l'égalité $f'(y_i) = y_i$ pour tout i.

Le terme « topologiquement diagonal » a été introduit par K. Mann dans son article [Man], où il est démontré que si $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est un morphisme de groupes non trivial avec $\dim(N) = 1$, alors $\dim(M) = 1$ et Φ est topologiquement diagonal.

Morphismes induits par des revêtements

Soit $\pi : N \to M$ un revêtement fini. Dans certains cas, on obtient un morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ en relevant tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ en un difféomorphisme $\widetilde{f} \in \mathrm{Diff}_c(N)$ ($\widetilde{f}$ relève f si $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$).

Par exemple, si M et N sont des surfaces hyperboliques compactes, $M = \mathbf{H}^2/\Gamma$ et $N = \mathbf{H}^2/\Gamma'$ avec $\Gamma' \subset \Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ discrets, tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ admet un unique relèvement $\overline{f}$ à $\mathbf{H}^2$ qui vaut l'identité sur $\partial\mathbf{H}^2 \simeq S^1$. On a de plus $\overline{fg} = \overline{f} \cdot \overline{g}$. En outre, $\overline{f}$ commute à Γ (car $\gamma f \gamma^{-1}$ relève f et vaut id sur $\partial\mathbf{H}^2$, donc est égal à f, pour tout $\gamma \in \Gamma$) donc à Γ', donc $\overline{f}$ descend en $\widetilde{f} \in \mathrm{Diff}_c(N)$, et $f \mapsto \widetilde{f}$ est un morphisme de groupe.

À l'inverse, tout revêtement $\pi : N \to M$ ne donne pas lieu à un morphisme par relèvement : en effet, si $\pi : \mathbf{R}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est le revêtement double, tout relevé de l'élément de $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ de $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ d'ordre 2 est d'ordre 4 dans $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}/2\mathbf{Z})$.

Nous allons donc chercher à quelles conditions il est possible d'obtenir un morphisme en relevant à N les difféomorphismes de M. Rappelons qu'un relevé $\widetilde{f}$ de $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ à N est déterminé de manière unique par l'image d'un point si M est connexe, cas où l'on peut toujours se ramener (car si M est non connexe, π consiste en un revêtement de composantes connexes de N

2. En revanche, il est facile de voir que cette construction fonctionne même lorsque l'on a une infinité de U_i dans la catégorie continue, *i.e.* pour les groupes d'homéomorphismes.

sur chacune des composantes connexes de M, elles-mêmes en nombre fini). On a en outre le résultat suivant :

Lemme 3.20. *Tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ admet un relevé $\widetilde{f} \in \mathrm{Diff}_c(N)$.*

Cela résulte de la propriété classique de relèvement des homotopies (cf. par exemple [Pau]) :

Proposition 3.21. *Soit $\pi : X \to B$ un revêtement, et $f : Y \to B$ une application continue admettant un relèvement $\widetilde{f} : Y \to X$. Si $h : [0,1] \times Y \to B$ est une homotopie telle que $h(0, \cdot) = f$, il existe un unique relèvement $\widetilde{h} : [0,1] \times Y \to X$ tel que $\widetilde{h}(0, \cdot) = \widetilde{f}$.*

Preuve du lemme 3.20. Si $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, écrivons $f = f_1$ où f_t est une isotopie lisse, $f_0 = \mathrm{id}_M$. Par relèvement des homotopies appliqué à l'homotopie $(t, x) \mapsto f_t \circ \pi(x)$ de $[0,1] \times N$ dans M, dont la valeur en $t = 0$ est π qui se relève en id_N, on obtient une homotopie $\widetilde{f_t} : [0,1] \times N \to N$ avec $\widetilde{f_0} = \mathrm{id}_N$. De plus, $\widetilde{f_t}$ est lisse car f_t l'est. De même, en relevant l'isotopie lisse $f_t^{-1} \circ \pi$, on obtient une homotopie lisse $\widetilde{f'_t}$. De plus, pour tout $t = 0$, $\widetilde{f'_t} \circ \widetilde{f_t}$ et $\widetilde{f_t} \circ \widetilde{f'_t}$ sont des relevés $N \to N$ de id_M, qui valent id_N à $t = 0$, donc pout tout t. On en déduit que pour tout t, $\widetilde{f_t} \in \mathrm{Diff}(N)$, donc que $\widetilde{f_t}$ est un isotopie. Ainsi, $\widetilde{f} := \widetilde{f_1}$ appartient à $\mathrm{Diff}_c(N)$ et relève $f_1 = f$, ce qui conclut. □

Définition-proposition 3.22. Soit $G = \mathrm{Diff}_c(M)$, H le groupe des relevés à $\mathrm{Diff}(N)$ des éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$, et $L \subset H$ le groupe de automorphismes du revêtement $\pi : N \to M$, qui est fini car π est un revêtement d'ordre fini. On définit $p : H \to G$ par $\pi \circ \widetilde{f} = p(\widetilde{f}) \circ \pi$, *i.e.* $p(\widetilde{f})$ est l'élément de G que $\widetilde{f} \in H$ relève à N. Alors la suite de morphismes de groupes

$$1 \to L \to H \xrightarrow{p} G \to 1$$

est exacte. De plus, si l'on munit H de la topologie induite par la topologie de $\mathrm{Diff}(N)$, c'est-à-dire la topologie $\mathscr{C}^\infty$, l'application $p : H \to G$ est un revêtement.

Démonstration. Le fait que H soit un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(N)$ est clair : $\mathrm{id}_N \in H$ et si $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in H$ relèvent $f, g \in G$, alors $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}^{-1}$ relève $f \circ g^{-1} \in G$. Le fait que $p : H \to G$ soit un morphisme de groupes est immédiat, et il résulte du lemme 3.20 que p est surjectif. Le fait que $L = \ker(p)$ signifie simplement que les éléments de L sont les relevés à N de id_M, d'où l'exactitude de la suite.

Reste à montrer que $p : H \to G$ est un revêtement. Notons $L = \{\mathrm{id}_N, g_2 \ldots, g_m\}$. Comme $p^{-1}(\mathrm{id}_M) = L$, et comme L agit librement sur N, on peut trouver un voisinage U de id_M suffisamment petit en topologie $\mathscr{C}^0$ tel que $p^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe de V_i, avec $g_i \in V_i$, de sorte que $V_i = g_i V_1$. On vérifie facilement que $p : V_1 \to U$ est continue et de réciproque continue, donc de même pour $p : V_i \to U$. Par surjectivité de p et comme les multiplications à gauche dans G et H sont des homéomorphismes, p est un revêtement. $\square$

Nous cherchons à quelle condition il existe un morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, faiblement continu, et tel que pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, $\Phi(f)$ soit un relèvement de f à N. Si N est compacte [3], M l'est aussi, donc $\Phi : G = \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu si et seulement si il est continu. Comme en outre G est connexe, tout morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}(N)$ est à valeurs dans la composante neutre $\mathrm{Diff}_c(N)$ de $\mathrm{Diff}(N)$. On cherche donc les morphismes continus $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(N)$ tels que $\Phi(f)$ relève f pour tout $f \in G$; mais cette condition équivaut à dire que Φ est un morphisme de groupes $G \to H$ continu tel que $p \circ \Phi = \mathrm{id}_G$. En résumé :

Lemme 3.23. Φ *est un morphisme de groupes* $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ *faiblement continu tel que* $\Phi(f)$ *relève* f *pour toute* $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ *si et seulement si* Φ *est un morphisme de groupes continu* $G \to H$ *qui est une section du revêtement* H.

Dans ce qui suit, nous appellerons *morphisme par relèvement* tout morphisme $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ vérifiant les conditions du lemme 3.23.

Corollaire 3.24. *Il existe un morphisme par relèvement (alors unique)* $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ *si et seulement si il n'existe pas de chemin continu dans* H *joignant* id_N *à un élément* $g \in L \setminus \{\mathrm{id}_N\}$.

Démonstration. Commençons par observer que H est localement connexe par arcs : en effet, H est localement homéomorphe, via p, à $G = \mathrm{Diff}_c(M)$, dont on a observé dans la remarque suivant le lemme 3.11 de fragmentation qu'il est localement connexe par arcs. Par conséquent, les composantes connexes par arcs de H sont ouvertes et coïncident avec ses composantes connexes.

Soit H_0 la composante neutre de l'identité, qui est un sous-groupe distingué connexe de H, et ouvert par ce qui précède. Comme on l'a vu plus haut, le relèvement des homotopies montre que $p|_{H_0} : H_0 \to G$ est surjectif. En outre, H_0 est la composante connexe par arcs de l'identité, donc le fait qu'il

3. Si M, N ne sont plus supposées compactes (mais $\pi : N \to M$ est toujours un recouvrement fini), tout ce qui est fait dans cette sous-partie sur les revêtements s'adapte sans modification, à condition de munir $\mathrm{Diff}_c(M)$ (et $\mathrm{Diff}_c(N)$) de la topologie induite par les inclusions $\mathrm{Diff}_K(M) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_c(M)$, qui en fait un groupe topologique, et pour laquelle les morphismes continus sont exactement les morphismes faiblement continus.

n'existe pas de chemin continu dans H reliant id_N à un élément de $L \setminus \{\mathrm{id}_N\}$ s'écrit : $H_0 \cap L = \{\mathrm{id}_N\}$. Comme $L = \ker(p)$, cela équivaut au fait que $p|_{H_0}$ est injectif, donc au fait que $p|_{H_0}$ est un isomorphisme de groupes.

Supposons qu'il existe un morphisme par relèvement $\Phi : G \to H$. Comme Φ est un morphisme de groupes continu et puisque G est connexe, on a $\Phi(G) \subset H_0$. En outre, $\Phi(G)$ est ouvert (car Φ, en tant que section du revêtement p, est un homéomorphisme local), donc fermé (un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé, car il est le complémentaire de la réunion des classes à gauches non triviales, qui sont ouvertes par translation). Comme H_0 est connexe, ceci implique que $\Phi(G) = H_0$. Ainsi, $\Phi : G \to H_0$ est surjectif, et injectif (en tant que section de p), donc est un isomorphisme de groupes. Comme $p \circ \Phi = \mathrm{id}_G$, on en déduit que $p|_{H_0} = \Phi^{-1}$, ce qui montre d'une part l'unicité de Φ, et d'autre part que $p|_{H_0}$ est un isomorphisme.

Réciproquement, si $p|_{H_0}$ est un isomorphisme de groupes, comme $p|_{H_0}$ est un homéomorphisme local, c'est également un homéomorphisme, et sa réciproque $\Phi : G \to H_0$ est un morphisme par relèvement. □

Nous allons maintenant chercher à exploiter la condition d'existence d'un morphisme de relèvement fournie par le corollaire 3.24. Notons que, par le existence et unicité des relèvements de chemins, $\gamma \mapsto p \circ \gamma$ induit une bijection entre l'ensemble des chemins de H joignant id_N à un élément de L et l'ensemble des lacets de G basés en $\mathrm{id}_M = e$.

Si $x \in M$, l'application $e_x : G = \mathrm{Diff}_c(M) \to M$ d'évaluation en x est continue, donc induit un morphisme de groupes $(e_x)_* : \pi_1(G, e) \to \pi_1(M, x)$. Rappelons que, si $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, le morphisme de groupes $\pi_* : \pi_1(N, \widetilde{x}) \to \pi_1(M, x)$ est injectif, et $\pi_* \pi_1(N, \widetilde{x}) \subset \pi_1(M, x)$ est le stabilisateur de $\widetilde{x}$ pour l'action à droite de $\pi_1(M, x)$ sur $\pi^{-1}(x)$.

Lemme 3.25. *Soit $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to H$, $t \mapsto \widetilde{\gamma}_t$ un chemin dans H tel que $\widetilde{\gamma}_0 = e$ et $\widetilde{\gamma}_1 \in L$, et soit $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma} : [0,1] \to G$ le lacet en e correspondant. Alors $\widetilde{\gamma}_1 = e$ si et seulement si $(e_x)_*[\gamma] \in \pi_* \pi_1(N, \widetilde{x})$, où $[\gamma] \in \pi_1(G, e)$ est la classe d'homotopie à extrémités fixées de γ.*

Démonstration. Posons, pour $t \in [0,1]$, $c(t) = \gamma_t(x)$, $\overline{c}(t) = \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x})$, et soit $\widetilde{c} : [0,1] \to N$ l'unique relevé de $c : [0,1] \to M$ tel que $\widetilde{c}(0) = \widetilde{x}$. La preuve procède en trois étapes élémentaires :

Étape 1 : $\overline{c} = \widetilde{c}$. En effet, on a $\pi \circ \overline{c}(t) = \pi \circ \widetilde{\gamma}_t(\widetilde{x}) = \gamma_t \circ \pi(\widetilde{x}) = \gamma_t(x) = c(t)$, soit $\pi \circ \overline{c} = c$, donc $\overline{c}$ est un relevé de c, tel que $\overline{c}(0) = \widetilde{\gamma}_0(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, donc par unicité du relèvement $\overline{c} = \widetilde{c}$.

Étape 2 : $\widetilde{\gamma_1} = e$ si et seulement si $\overline{c}(1) = \widetilde{x}$. En effet, $\widetilde{\gamma_1} \in L$, et L agit librement sur N, donc $\widetilde{\gamma_1} = e$ si et seulement si $\widetilde{\gamma_1}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, *i.e.* $\overline{c}(1) = \widetilde{x}$.

Étape 3 : $(e_x)_*[\gamma] \in \pi_*\pi_1(N, \widetilde{x})$ si et seulement si $\widetilde{c}(1) = \widetilde{x}$. En effet, l'élément $(e_x)_*[\gamma] = [e_x \circ \gamma] = [c]$ de $\pi_1(M, x)$ appartient à $\pi_*\pi_1(N, \widetilde{x})$ si et seulement s'il fixe $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, ce qui équivaut par définition à $\widetilde{c}(1) = \widetilde{x}$. □

À partir des lemmes 3.24 et 3.26, nous pouvons énoncer :

Proposition 3.26. *Soit $\pi : N \to M$ un revêtement, $x \in M$, et $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Il existe un (unique) morphisme par relèvement $\pi^* : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$, i.e. un morphisme faiblement continu tel que, pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\pi^*(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & N \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

commute, si, et seulement si, $(e_x)_*\pi_1(\mathrm{Diff}_c(M)) \subset \pi_*\pi_1(N, \widetilde{x})$.

Remarque. La deuxième propriété de ce lemme ne dépend donc pas du choix de $x \in M$ et de $\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)$.

Le critère fourni dans le lemme précédent pour l'existence d'un morphisme par relèvement est nécessaire et suffisant, mais il est difficile à exploiter en pratique. Voici un corollaire plus maniable :

Corollaire 3.27. *Si $\pi : N \to M$ est un revêtement, et si le centre de $\pi_1(M)$ est trivial, alors il existe un morphisme $\pi^* : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ par relèvement.*

Démonstration. Nous allons montrer que le sous-groupe $(e_x)_*\pi_1(\mathrm{Diff}_c(M))$ de $\pi_1(M, x)$ est central, ce qui démontre le résultat. Soit c un lacet de M en x, $\gamma = (f_t)_{t\in[0,1]}$ un lacet de $\mathrm{Diff}_c(M)$ en l'identité, et soit pour tout $t \in [0, 1]$ γ_t le chemin $\gamma|_{[0,t]}$ entre e et f_t. Alors, en notant $\overline{c_0}(t) = c_0(-t)$ le chemin opposé dans M, la famille $(\overline{\{(e_x)_*\gamma_t\}} \cdot f_t(c) \cdot \{(e_x)_*\gamma_t\})_{0\leqslant t\leqslant 1}$ réalise une homotopie à extrémités fixées entre c et $\overline{\{(e_x)_*\gamma\}} \cdot c \cdot \{(e_x)_*\gamma\}$, d'où l'égalité dans $\pi_1(M, x)$: $[(e_x)_*\gamma]^{-1}[c][(e_x)_*\gamma] = [c]$. Ceci montre que $(e_x)_*\pi_1(\mathrm{Diff}_c(M))$ est central dans $\pi_1(M, x)$, donc trivial si le centre de $\pi_1(M, x)$ l'est, ce qui conclut. □

3.2.3 Preuve de la classification

Dans cette section, nous allons montrer que, si $\dim(M) = \dim(N)$, tous les morphismes faiblement continus $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ peuvent s'obtenir à partir des deux exemples fondamentaux précédents. Plus précisément, nous allons montrer que tous ces morphismes sont *topologiquement diagonaux étendus* :

Définition 3.28 (Morphisme topologiquement diagonal étendu)**.** Soit Φ : $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes. On dit que Φ est *topologiquement diagonal étendu* s'il existe un nombre fini d'ouverts U_i deux-à-deux disjoints de N et, pour tout i, un revêtement fini $\pi_i : U_i \to M$, tels que pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ et $x \in M$:

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \pi_i^*(f)(x) & \text{si } x \in U_i \\ x & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\pi_i^* : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(M_i)$ désigne le morphisme de revêtement comme dans 3.26.

Remarques. (1) Dans le cas particulier où les revêtements $\pi_i : U_i \to M$ sont des difféomorphismes, on retrouve la définition de morphismes topologiquement diagonaux. De même, si l'on ne prend qu'un seul ouvert, égal à N tout entier, on retrouve évidemment la notion de morphisme par relèvement.

(2) De la même manière que dans le cas des morphismes topologiquement diagonaux, on montre que pour que la formule 3.3 définisse un difféomorphisme pour tout f, il faut (et il suffit) que les U_i soient en nombre fini et que chaque revêtement $\pi_i : U_i \to M$ soit fini. En effet, si $x \in M$, et si $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ vérifie $f(x) = x$ et $Df(x) = 2\,\mathrm{id}$, $\bigcup_i \pi_i^{-1}(x)$ doit d'une part être contenu dans un compact (car $\Phi(f)$ est à support compact), et d'autre part ne doit pas avoir de point d'accumulation dans N (car $\Phi(f)$ est différentiable). Ceci implique que $\bigcup_i \pi_i^{-1}(x)$ est fini, donc que les U_i sont en nombre fini et que les π_i sont finis.

Cette section sera consacrée à la démonstration du résultat suivant :

Théorème 3.29. *Soit* $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ *un morphisme de groupes faiblement continu non trivial, avec* $\dim(M) \geqslant \dim(N)$. *Alors* $\dim(M) = \dim(N)$ *et* Φ *est topologiquement diagonal étendu.*

Pour cela, nous allons devoir « retrouver » les ouverts U_i, ainsi que les revêtements $\pi_i : U_i \to M$, à partir de la donnée du morphisme Φ. L'idée est la suivante : si Φ est un morphisme topologiquement diagonal étendu, induit par les $\pi_i : U_i \to M$, il est clair que $S = \bigcup_i U_i$ est l'ensemble des points $p \in N$ tels qu'il existe $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ tel que $\Phi(f)(p) \neq p$. De plus, on peut toujours supposer que les U_i sont connexes, quitte à « séparer » les revêtements d'espace total non connexe en plusieurs revêtements. Les U_i sont alors les composantes connexes de S. Il reste à déterminer les $\pi_i : U_i \to M$. Cela revient, pour tout $x \in M$, à déterminer $\pi_i^{-1}(x)$. Mais si $\Phi = \pi_i^*$, les éléments de $\pi_i^{-1}(x)$ sont exactement les $y \in U_i$ qui sont déplacés par des (images par Φ de) difféomorphismes de M à support arbitrairement petit autour de x.

Mettons en œuvre ces intuitions, en commençant par définir les constructions que motivent les remarques précédentes. Dans toute cette section, on suppose que $\dim(M) \geqslant \dim(N)$.

Définition 3.30. Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes faiblement continu. Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c(M)$, on note :

$$S(G) = N \setminus \mathrm{Fix}\,(\Phi(G)) = \{p \in N \mid \exists f \in G,\ \Phi(f)(p) \neq p\}$$

qui est un ouvert de N. On pose de plus $S = S(\mathrm{Diff}_c(M))$. Enfin, pour tout $x \in M$, on définit :

$$S_x = \bigcap_{U \ni x} S(G_U)\,,$$

l'intersection portant sur l'ensemble des ouverts U de M contenant x, et où G_U désigne, comme auparavant, les éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans U.

Lemme 3.31. *Soit Φ un morphisme non trivial, et $x \in M$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *S_x est non vide.*
2. *Pour toute $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, $\Phi(f)\, S_x = S_{f(x)}$.*
3. *On a $S = \bigcup_{x \in M} S_x$.*

Démonstration. Notons d'abord que le premier point découle directement des points (2) et (3). Commençons par montrer (2). Si $G \subset \mathrm{Diff}_c(M)$ est un sous-groupe, comme $\Phi(f)$ est un difféomorphisme de N, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(f)S(G) &= \Phi(f) \bigcup_{g \in G} [N \setminus \mathrm{Fix}\,\Phi(g)] = \bigcup_{g \in G} [N \setminus \Phi(f)\mathrm{Fix}\,\Phi(g)] \\ &= \bigcup_{g \in G} [N \setminus \mathrm{Fix}\,(\Phi(f)\Phi(g)\Phi(f)^{-1})] = S(fGf^{-1})\end{aligned}$$

d'où :

$$\Phi(f)S_x = \bigcap_{U \ni x} \Phi(f)S(G_U) = \bigcap_{U \ni x} S(fG_Uf^{-1}) = \bigcap_{U \ni x} S(G_{fU}) \overset{V=fU}{=} \bigcap_{V \ni f(x)} S(G_V)$$

i.e. $\Phi(f)S_x = S_{f(x)}$.

Montrons maintenant (3), en utilisant la propriété de fragmentation 3.11. Soit $p \in S$, et $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ telle que $\Phi(f)p \neq p$. En écrivant, par la propriété de fragmentation, $f = h_1 \cdots h_m$ où les h_j sont à support dans des boules ouvertes, on a $\Phi(h_1) \cdots \Phi(h_m)p \neq p$, donc il existe j tel que $f_1 := h_j$, à support dans $B_1 \subset M$, ne fixe pas p. Soit $\phi : B_1 \xrightarrow{\sim} B(0,1) \subset \mathbf{R}^n$ une carte. En recouvrant B_1 par des boules de rayon $\frac{1}{2}$ dans la carte ϕ, on obtient à nouveau, par fragmentation, $f_2 \in \mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans une boule $B_2 \subset B_1$ de rayon $\frac{1}{2}$ dans la carte ϕ, tel que $f_2(p) \neq p$. Par récurrence, on obtient une suite décroissante $(B_n)_n$ de boules de M, telle que $\mathrm{diam}\,(\phi(B_n)) = \frac{1}{2^{n-2}}$, avec pour tout n un élément $f_n \in G_{B_n}$ tel que $f_n(p) \neq p$.

En se plaçant dans la carte ϕ, et en utilisant la complétude de $\mathbf{R}^n$, on voit que $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est un singleton, soit $x \in M$. De plus, pour tout ouvert U de M contenant x, il existe n tel que $B_n \subset U$. Or $f_n \in G_U$ déplace p, donc $p \in S(U)$. Ainsi, $p \in S_x$ comme voulu. □

Nous allons maintenant établir les deux lemmes techniques 3.32 et 3.33, qui nous permettront de démontrer le lemme crucial 3.34. En particulier, les lemmes 3.33 et 3.34 sont le cœur de cette section.

Lemme 3.32. *Soit $x_0 \in M$, et U un ouvert contenant x_0. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 dans U et une application continue $\Psi : \mathcal{V}_{x_0} \to G_U$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$, on ait $\Psi(x)(x_0) = x$.*

Démonstration. En se plaçant dans une carte locale en x_0 contenue dans U, on se ramène au cas où $U = M = \mathbf{R}^n$ et $x_0 = 0$. Soit $\mathcal{V}_0 := B(0,1)$, et $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de $B(0,2)$. Pour tout $v \in \mathcal{V}_0$, on définit le champ de vecteurs $X_v(p) = \chi(p)v$ sur $\mathbf{R}^n$, qui dépend de façon lisse de v. Par régularité du flux (théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres), l'application $(v,x) \mapsto \phi^1_{X_v}(x)$ de $\mathcal{V}_0 \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est $\mathscr{C}^\infty$, donc l'application $\Psi : \mathcal{V}_0 \to G_U$ définie par $\Psi(v) = \phi^1_{X_v}$ est continue. De plus, on a par construction $\Psi(v)(0) = v$ pour tout $v \in \mathcal{V}_0$. □

Le lemme suivant introduit une notion de dimension, en ce sens qu'il fait intervenir la dimension de la variété sous-jacente au groupe de difféomorphisme. Il n'est donc pas surprenant que sa preuve utilise de manière cruciale l'« algèbre de Lie » de $\mathrm{Diff}_c(M)$, c'est-à-dire l'espace $\mathfrak{X}_c(M)$ des champs de vecteurs à support compact sur M.

Lemme 3.33. *Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme faiblement continu, et soit $n = \dim(N)$. Si $p \in N$, il n'existe pas $n+1$ ouverts $U_1, \ldots, U_{n+1} \subset M$ deux-à-deux disjoints tels que, pour tout i, $\Phi(G_{U_i})$ ne fixe pas p.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $p \in N$ et $U_1, \dots, U_{n+1} \subset M$ deux-à-deux disjoints qui ne fixent pas p. Comme les flux engendrent G_{U_i} (il s'agit d'un résultat classique que nous admettrons), on en déduit que, pour tout i, il existe un flux $f_t^i \in G_{U_i}$ tel que $\Phi(f_t^i)$ ne fixe pas p. Par le lemme 3.18, $\Phi(f_t^i)$ est lui-même un flux engendré par un champ de vecteurs Y_i sur N, et tel que $Y_i(p) \neq 0$. De plus, comme pour $i \neq j$, G_{U_i} et G_{U_j} commutent, $\Phi(f_t^i)$ et $\Phi(f_t^j)$ commutent, donc $[Y_i, Y_j] = 0$.

Soit k maximal tel qu'il existe des champs $X_1, \dots, X_k$, issus de flux appartenant à des $\Phi(G_{U_j})$ deux-à-deux distincts, tels que $(X_1(p), \dots, X_k(p))$ soit libre. On a nécessairement $k \leqslant n$, donc quitte à renuméroter on peut supposer qu'aucun des X_j ne provient d'un flux de $\Phi(G_{U_{n+1}})$.

Soit $U \subset N$ un voisinage ouvert de p sur lequel la famille $(X_1, \dots, X_k)$ est libre. Comme on a $[X_i, X_j] = 0$ pour tous i, j, le théorème de Frobenius assure que la distribution engendrée par les champs $(X_1, \dots, X_k)$ est intégrable, donc définit un feuilletage au voisinage de p ; on note L la feuille passant par p. En outre, le théorème de Frobenius assure qu'il existe une carte locale $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ de N en p telle que, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, $\phi_* X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$. On complète alors (X_j) en une base locale $(X_1, \dots, X_n)$ de TN en posant $X_l = (\phi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^l}$ pour l entre $k+1$ et n, de sorte que $[X_p, X_q] = 0$ pour $1 \leqslant p, q \leqslant n$.

Soit f_t un flux de $G_{U_{n+1}}$, et Y le champ de vecteurs sur N associé à $\Phi(f_t)$. Par maximalité de k, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ tels que $Y(p) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \alpha_j X_j(p)$. De plus, on a $[X_j, Y] = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Or, en écrivant $Y = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i X_i$ au voisinage de p, avec f_i des fonctions lisses, on a pour $1 \leqslant j \leqslant k$:

$$0 = [X_j, Y] = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_j(f_i) X_i + f_i \underbrace{[X_j, X_i]}_{=0}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} X_j(f_i) X_i \,,$$

donc, comme (X_i) est une base, $X_j(f_i) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k$. Comme L est la sous-variété intégrale engendrée par les X_j, $j \leqslant k$, f_i est constante sur L, donc $Y = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \alpha_j X_j$ sur L. En particulier, ceci implique que son flux $\Phi(f_t)$ préserve L ; comme $G_{U_{n+1}}$ est engendré par ses flux, cela signifie que $\Phi(G_{U_{n+1}})$ préserve L. On dispose donc d'un morphisme $\Psi : G_{U_{n+1}} \to \mathrm{Diff}_c(L)$, faiblement continu car Φ l'est, et non trivial car $\Phi(G_{U_{n+1}})$ ne fixe pas p.

Enfin, soient si f_t et g_t deux flux de $G_{U_{n+1}}$, et soient Y, Z les champs de vecteurs associés aux flux $\Phi(f_t)$ et $\Phi(g_t)$. Alors, on a montré plus haut qu'il existe des constantes $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}$ telles que $Y = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \alpha_j X_j$ et $Z = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \beta_j X_j$ sur L. Ainsi $[Y, Z] = 0$ sur L, donc $\Psi(f_t)\Psi(g_s) = \Psi(g_s)\Psi(f_t)$.

Comme les flux engendrent $G_{U_{n+1}}$, l'image de Ψ est abélienne, ce qui contredit la simplicité de $G_{U_{n+1}}$. $\square$

Lemme 3.34. *Pour tous $x, y \in M$ tels que $x \neq y$, on a $S_x \cap S_y = \varnothing$.*

Démonstration. Le lemme 3.33 affirme que, si $U_1, \ldots, U_{n+1}$ sont des ouverts deux-à-deux disjoints, on a $S(G_{U_1}) \cap \cdots \cap S(G_{U_{n+1}}) = \varnothing$, donc si $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont des points deux-à-deux distincts de M on a $S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_{n+1}} = \varnothing$.

Soit $k \leqslant n$ maximal tel qu'il existe $x_1, \ldots, x_k \in M$ deux-à-deux distincts tels que $S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_k} \neq \varnothing$, et soit $p \in S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_k}$. Nous voulons montrer que $k = 1$. Soient $U_1, \ldots U_k$ des ouverts deux-à-deux disjoints de M tels que $x_i \in U_i$; quitte à les rétrécir, on peut supposer les U_i relativement compacts. Par le lemme 3.32, il existe pour tout i un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{x_i} \subset U_i$ de x_i et une application continue $\Psi_i : \mathcal{V}_{x_i} \to G_{U_i}$ telle que, pour tout $y_i \in \mathcal{V}_{x_i}$, $\Psi_i(y_i)(x_i) = y_i$.

Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_k$, et soit :

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathrm{Diff}_c(N) \\ & (y_1, \ldots, y_k) & \longmapsto & \Phi(\Psi_1(y_1) \cdots \Psi_k(y_k)) \,. \end{array}$$

Ψ est continue par composition et par produit, car toutes les Ψ_i sont continues et car Φ est faiblement continue, donc continue sur $\mathrm{Diff}_K(M)$ où $K = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{U_i}$ est compact. Par le théorème 3.16 de Montgomery-Zippin, on en déduit que l'application $\mathcal{V} \times N \to N$, $(y, q) \mapsto \Psi(y)q$ est $\mathscr{C}^\infty$. En particulier, l'application $\Theta : \mathcal{V} \to N$ définie par $\Theta(y) = \Psi(y)p$ est lisse.

Montrons que Θ est injective. Si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}$, on a pour tout j, $\Psi_1(y_1) \cdots \Psi_k(y_k)\, x_j = y_j$, donc par le lemme 3.31, on a :

$$\Psi(y)(S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_k}) = \Phi(\Psi_1(y_1) \cdots \Psi_k(y_k))(S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_k}) = S_{y_1} \cap \cdots \cap S_{y_k} \,.$$

En appliquant $\Psi(y)$ à l'appartenance : $p \in S_{x_1} \cap \cdots \cap S_{x_k}$, on obtient donc : $\Theta(y_1, \ldots, y_k) \in S_{y_1} \cap \cdots \cap S_{y_k}$. Supposons à présent qu'il existe $y \neq y'$ dans $\mathcal{V}$ tels que $\Theta(y) = \Theta(y')$. Soit j tel que $y_j \neq y'_j$, de sorte que $y_j \notin \{y_1, \ldots, y_k\}$. On a vu que $\Theta(y) \in S_{y_1} \cap \cdots \cap S_{y_k}$, donc aussi $\Theta(y) = \Theta(y') \in S_{y'_1} \cap \cdots \cap S_{y'_k}$. En particulier, $\Theta(y) \in S_{y_1} \cap \cdots \cap S(y_k) \cap S(y'_j)$, donc cet ensemble est non vide, ce qui contredit la maximalité de k.

Ainsi, $\Theta : \mathcal{V} \to N$ est une application lisse injective, donc [4] $\dim(\mathcal{V}) \leqslant \dim(N)$, *i.e.* $k \dim(M) \leqslant \dim(N)$. Comme $\dim(M) \geqslant \dim(N)$, ceci implique

4. Pour montrer que si $f : M \to N$ est un application lisse entre des variétés M, N de dimensions respectives m, n, alors $m \leqslant n$, on choisit $p \in M$ tel que $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ soit de rang maximal $r \leqslant \min(m, n)$. Au voisinage de p, df est de rang r, donc par le théorème du rang constant, f s'écrit dans des cartes comme une application linéaire de rang r $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ au voisinage de 0. Or f est injective, donc $r \geqslant m$, d'où $m \leqslant n$.

que $\dim(M) = \dim(N)$ et $k = 1$, ce qui conclut la preuve. Notons tout de même que l'application $\Theta : \mathcal{V} \to N$, où $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{x_1} \subset M$, est une application lisse et injective entre variétés de même dimension, donc par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer, Θ est ouverte. $\square$

Remarque. Le lemme 3.34 est le premier résultat de cette section qui se sert de l'hypothèse $\dim(M) \geqslant \dim(N)$. Si l'on se passe de cette condition, l'approche adoptée ne permet plus de démontrer le lemme 3.34. En revanche, si l'on fait l'hypothèse plus faible $\dim(M) > \frac{1}{2}\dim(N)$, le lemme 3.34 reste valide, par le même argument ($k\dim(M) \leqslant \dim(N)$ implique $k = 1$). Cependant, Θ n'est plus ouverte et il est plus difficile de dire quelque chose de son image (si $\dim(M) < \dim(N)$, il n'est pas vrai en général que l'image d'une application lisse injective $M \to N$ soit une sous-variété de dimension $\dim(M)$), ce qui rend ce résultat moins exploitable.

De la fin de la preuve du lemme 3.34, on déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.35. *Si $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est un morphisme faiblement continu non trivial avec $\dim(M) \geqslant \dim(N)$, on a $\dim(M) = \dim(N)$. De plus, pour tout $p \in S$, $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))p$ est ouvert.*

Démonstration. Le premier point ($\dim(M) = \dim(N)$) a été explicitement énoncé dans la preuve. Le second point résulte du fait que, pour tout $p \in S$, si $x \in M$ est tel que $p \in S_x$, l'application $\Theta : \mathcal{V}_x \to N$, $y \mapsto \Phi(\Psi(y))p$ est ouverte, donc contient un voisinage de p. Ainsi, les orbites de l'action de $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))$ sur S contiennent un voisinage de chacun de leurs points, et sont donc ouvertes. $\square$

Ainsi, $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))$ agit comme l'identité sur le fermé $N \setminus S$; ses orbites dans S sont ouvertes (donc fermées dans S par complémentaire, donc ce sont des réunions de composantes connexes de S) et connexes car $\mathrm{Diff}_c(M)$ est connexe par arcs et Φ faiblement continu. Ce sont donc exactement les composantes connexes de S, et $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))$ agit transitivement dessus. Pour conclure que Φ est topologiquement diagonal étendu, nous sommes ramenés à démontrer le résultat suivant :

Lemme 3.36. *Si $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))$ agit transitivement sur N, il existe un revêtement lisse $\pi : N \to M$ tel que, pour toute $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & N \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

i.e. $\Phi = \pi^*$ *comme dans le lemme 3.26.*

Démonstration. On définit $\pi : N \to M$ par $\pi(p) = x$ si $p \in S_x$. Cette définition est non équivoque, car si $x \neq y$, $S_x \cap S_y = \varnothing$ par le lemme 3.34. En outre, comme $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M))$ agit transitivement sur N, $N = S = \bigcup_{x \in M} S_x$ (lemme 3.31), donc π est défini partout. π est également surjectif, car S_x est non vide pour tout x.

Montrons que Φ est un revêtement lisse. Soient $p \in N$ et $x = \pi(p)$, *i.e.* $p \in S_x$. Soit U un ouvert relativement compact contenant x, et $\Psi : \mathcal{V}_x \to G_U$ continue comme dans le lemme 3.32, avec $\mathcal{V}_x \subset U$ un voisinage ouvert de x. On définit $\Theta : \mathcal{V}_x \to N$ comme dans la preuve du lemme 3.34 : $\Theta(y) = \Phi(\Psi(y))p$. On a vu que Θ est lisse, injective et ouverte, et induit un difféomorphisme lisse entre $\mathcal{V}_x$ et un voisinage ouvert de p. De plus, on a aussi vu que $\Theta(y) \in S_y$, donc $\pi \circ \Theta = \mathrm{id}_{\mathcal{V}_x}$. Ainsi, π est un revêtement lisse.

Enfin, on a pour toute $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ et tout $x \in M$, $\Phi(f)\, S_x = S_{f(x)}$ (cf. 3.31). Si donc $p \in N$ et $x = \pi(p)$, on a $p \in S_x$, donc $\Phi(f)\, p \in S_{f(x)}$, *i.e.* $\pi(\Phi(f)p) = f(x) = f(\pi(p))$. Donc $\pi \circ \Phi(f) = f \circ \pi$ pour toute $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, *i.e.* le diagramme de l'énoncé commute et ainsi $\Phi = \pi^*$ par unicité (cf. 3.26). □

Nous pouvons à présent conclure la preuve du théorème 3.29. Si $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu, par ce qui précède, il existe des ouverts connexes U_i de N et des revêtements $\pi_i : U_i \to M$ tels que $\Phi(f)$ agisse comme $\pi_i^*(f)$. Cela montre que Φ est de la forme (3.3). Enfin, comme $\Phi(f)$ est un difféomorphisme pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, par la remarque (2) suivant la définition 3.28, les U_i sont en nombre fini et les revêtements π_i sont finis, donc Φ est topologiquement diagonal étendu.

Remarque. Contrairement à [Hur], nous avons énoncé le théorème 3.29 sans supposer que N soit compacte ; la preuve est pourtant sensiblement la même, mais l'hypothèse de compacité de N n'est pas nécessaire. Cela vient en partie du fait que l'on considère les morphismes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$; si un tel morphisme est de la forme (3.3), la condition que $\Phi(f)$ soit un difféomorphisme à support compact implique que les U_i soient en nombre fini et que les revêtements π_i soient finis (cf. la remarque (2) suivant la définition 3.28).

Si N est non compacte et si l'on considère cette fois les morphismes faiblement continus $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}(N)$, le travail effectué dans cette partie 3.2.3 reste pour l'essentiel valide, et montre qu'un tel morphisme est de la forme (3.3). En revanche, un tel morphisme n'est pas nécessairement topologiquement diagonal : on peut construire d'autres morphismes avec une infinité de U_i (pourvu qu'ils ne s'accumulent pas) et/ou des revêtements infinis. Plus précisément, l'expression (3.3) définit un morphisme de groupes

$\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}(N)$ si et seulement si pour $x \in M$ l'ensemble $\bigcup_i \pi_i^{-1}(x)$ n'admet pas de point d'accumulation dans N.

Concluons cette partie en montrant que la classification obtenue dans le théorème 3.29 permet de retrouver le théorème de Filipkiewicz [Fil], sous réserve d'admettre que tout morphisme de groupes est faiblement continu, ce qui sera établi plus tard (théorème 1.1, ainsi que la sous-partie 6.2.4 pour le cas où N est non compacte).

Théorème 3.37 (Filipkiewicz)**.** *Soient M, N deux variétés $\mathscr{C}^\infty$, telles que les groupes $\mathrm{Diff}_c(M)$ et $\mathrm{Diff}_c(N)$ soient isomorphes. Alors M et N sont difféomorphes, et tout isomorphisme $\mathrm{Diff}_c(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}_c(N)$ est de la forme $f \mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, où $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. Admettons pour l'instant que tout morphisme de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu (théorème 1.1 et section 6.2.4). Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un isomorphisme de groupes. En appliquant le corollaire 3.35 à Φ et Φ^{-1}, on voit que $\dim(M) = \dim(N)$. Comme $\Phi(\mathrm{Diff}_c(M)) = \mathrm{Diff}_c(N)$ agit transitivement sur f, par le théorème 3.29 (ou par le lemme 3.36) il existe un revêtement $\pi : N \to M$ tel que $\Phi = \pi^*$. En outre, si $x \neq x'$ vérifient $\pi(x) = \pi(x')$, il existe un élément de $g \in \mathrm{Diff}_c(N)$ qui fixe x et envoie x' sur un élément y' proche de x' tel que $\pi(y') \neq \pi(x')$, de sorte que $\pi(g(x)) \neq \pi(g(x'))$, ce qui contredit le fait que g est le relèvement d'un élément $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ par surjectivité de $\Phi = \pi^*$. Le relèvement lisse $\pi : N \to M$ est donc injectif, c'est donc un difféomorphisme. On a en outre pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, $\pi \circ \Phi(f) = f \circ \pi$, d'où $\Phi(f) = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$. $\square$

Chapitre 4

Éléments de distorsion dans les groupes de difféomorphismes

À partir de maintenant, toute la suite de ce texte est consacrée à la démonstration du théorème 1.1 de faible continuité des morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ pour N compacte. Dans cette partie, nous présentons le théorème de Militon 4.4, dont nous expliquons les idées de la preuve. Ce théorème nous servira de pont entre la topologie et l'algèbre, et sera utilisé dans la partie suivante.

Le travail de Militon [Mili] s'inscrit dans le problème général de l'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes. Une première question dans ce domaine, posée par Franks et Handel dans [FH], demande si une rotation quelconque du cercle est distordue dans $\mathrm{Homeo}(S^1)$ (ou dans $\mathrm{Diff}(S^1)$).

Une réponse à cette question a d'abord été fournie par Calegari et Freedman dans [CF], où ils montrent qu'une rotation est distordue dans le groupe des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes du cercle, et qu'en dimension N quelconque, toute rotation est distordue dans le groupe $\mathrm{Homeo}(S^N)$. La question de savoir si une rotation est distordue dans le groupe $\mathrm{Diff}(S^N)$ des $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes restait cependant ouverte.

Dans le cas de S^1, Avila a établi dans [Avi] un résultat plus précis et plus général, qui montre en particulier que tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}(S^1)$ *récurrent* (*i.e.* tel qu'il existe une sous-suite de $(f^n)_n$ convergeant vers l'identité) du cercle est distordu dans $\mathrm{Diff}(S^1)$. En adaptant ses idées, E. Militon a pu étendre ce résultat au cas d'une variété quelconque [Mili]. C'est ce résultat que nous allons présenter dans cette section.

4.1 Distorsion dans les groupes

Commençons par définir la notion de distorsion dans un groupe. Si Γ est un groupe de type fini, et S une partie génératrice finie et symétrique de Γ, on définit la *longueur de mots* $\ell_S : \Gamma \to \mathbf{N}$ par rapport à S de la façon suivante :

$$\ell_S(g) = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S,\ g = s_1 \cdots s_n\}\,.$$

Cette fonction vérifie clairement $\ell_S(g^{-1}) = \ell_S(g)$, ainsi que $\ell_S(gh) \leqslant \ell_S(g)+\ell_S(h)$ pour tous $g, h \in \Gamma$. De plus, si S' est une autre partie génératrice symétrique finie de Γ, on a : $\ell_S \leqslant C\ell_{S'}$, avec $C = \max_{s' \in S'} \ell_S(s')$.

Si $g \in \Gamma$, la suite $\ell_S(g^n)$ est sous-additive, donc par un lemme classique la suite $\frac{\ell_S(g^n)}{n}$ converge vers $\tau_S(g) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{\ell_S(g^n)}{n} \in \mathbf{R}^+$. De plus, si S' est une autre partie génératrice de Γ, on a $\tau_S \leqslant C\tau_{S'}$, avec C défini comme précédemment. En particulier, pour tout $g \in \Gamma$, $\tau_S(g) = 0$ si et seulement si $\tau_{S'}(g) = 0$. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 4.1. Soit Γ un groupe de type fini. Un élément de $g \in \Gamma$ est dit *distordu* s'il existe une partie génératrice finie symétrique $S \subset \Gamma$ telle que $\ell_S(g^n) = o(n)$. De plus, cette propriété ne dépend pas du choix de S.

Nous pouvons alors étendre cette définition au cas d'un groupe G quelconque.

Définition 4.2 (Distorsion)**.** Soit G un groupe, et $g \in G$. On dit que g est *distordu* s'il existe un sous-groupe de type fini $\Gamma \subset G$ contenant g tel que g soit distordu dans Γ. De manière équivalente, $g \in G$ est distordu s'il existe une partie finie $S \subset G$ telle que g appartienne au sous-groupe de G engendré par S et si $\ell_S(g^n) = o(n)$.

Intuitivement, g est distordu dans G s'il existe un nombre fini d'éléments de G permettant d'exprimer les puissances de G comme des mots de longueur petite. La propriété de distorsion dépend de manière cruciale du groupe G contenant g : plus le groupe G est grand, plus cette propriété est faible (si $g \in G$ est distordu dans $H \subset G$, alors il est distordu dans G). Par exemple, g est distordu dans $\langle g \rangle$ si et seulement s'il est d'ordre fini.

Exemple. Dans $G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A n'est pas distordu dans G, car $\|A^n\| \geqslant C \cdot 2^n$ pour une constante $C > 0$. En revanche, B est distordu dans G, car $A^nBA^{-n} = B^{2^n}$, donc si $S = \{A^{\pm 1}, B^{\pm 1}\}$, $\frac{1}{2^n}\ell_S(B^{2^n}) \leqslant \frac{2n+1}{2^n} \to 0$, donc $\tau_S(B) = 0$.

Proposition 4.3. *Soit $\Phi : G \to H$ un morphisme de groupes. Si $g \in G$ est distordu, alors $\Phi(g)$ est distordu dans H.*

Démonstration. Cela résulte directement du fait que $\ell_{\Phi(S)}(\Phi(g)^n) \leqslant \ell_S(g^n)$ pour tout n, car $g^n = s_1 \cdots s_k$ implique $\Phi(g)^n = \Phi(s_1) \cdots \Phi(s_k)$. □

La propriété de distorsion est importante, car elle permet d'exprimer les puissances d'un élément comme des produits suffisamment petits d'éléments fixés de G, donc de borner ces normes (comme ce sera fait dans la partie 5).

4.2 Théorème de Militon

Dans cette section, nous démontrons le théorème de Militon 4.4, qui sera utilisé par la suite. Le théorème de Militon implique en particulier que tout élément récurrent de $\mathrm{Diff}_c(M)$ est distordu (cf. le corollaire 4.7).

Théorème 4.4 (Militon). *Soit K un compact de M. Il existe des suites ε_n, k_n de réels positifs avec $\varepsilon_n \to 0$ et $k_n \to \infty$ telles que, pour toute suite $f_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $d(f_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$, il existe une partie finie $S \subset \mathrm{Diff}_c(M)$ telle que :*

(*i*) *Pour tout n, f_n appartient au sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c(M)$ engendré par la partie S.*

(*ii*) *Pour tout n, $\ell_S(f_n) \leqslant k_n$.*

Remarque. d désigne une distance sur $\mathrm{Diff}_K(M)$ qui métrise la topologie $\mathscr{C}^\infty$.

La preuve procède en deux étapes : dans un premier temps, on montre que l'on peut se ramener au cas où f_n est un commutateur d'éléments proches de l'identité à support dans une boule de M, par un résultat de perfection locale ; dans un second temps, on démontre la propriété dans ce contexte.

Lemme 4.5 (Perfection locale). *Soit K un compact de M, et $B_1, \ldots, B_k$ des boules ouvertes de M qui recouvrent K. Si $f \in \mathrm{Diff}_K(M)$ est suffisamment proche de l'identité, il existe des difféomorphismes $g_{ij}, h_{ij} \in G_{B_j}$ ($1 \leqslant i \leqslant 3m = 3 \dim M$, $1 \leqslant j \leqslant k$) proches de l'identité tels que :*

$$f = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{3m} [g_{ij}, h_{ij}] .$$

Démonstration. Par le lemme de fragmentation 3.11, nous pouvons écrire f comme le produit d'éléments $f_j \in G_{B_j}$ proches de l'identité. Nous sommes donc ramenés à montrer que si $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m)$ est proche de l'identité, il peut s'écrire comme le produit de $3m$ commutateurs $[g_i, h_i]$ avec $g_i, h_i \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m)$ proches de l'identité.

Soit $K \subset \mathbf{R}^m$ compact, que l'on peut supposer inclus dans l'ouvert $U :=]-1,1[^m$. Soit également V un voisinage ouvert de $\overline{U}$ dans $\mathbf{R}^m$. Nous allons montrer que tout $f \in \mathrm{Diff}_K(\mathbf{R}^m) \subset G_U$ proche de l'identité peut s'écrire comme un produit de m difféomorphismes dans G_U, proches de l'identité, préservant chacun un feuilletage en droites de U. On prolongera ensuite chaque feuilletage en droites de U en un feuilletage en cercles d'un anneau de V, puis l'on appliquera un résultat de perfection locale pour le cercle.

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, notons F_k le feuilletage en droites de U constitué des (intersections avec U des) droites parallèles au k-ième axe de coordonnées, et $\pi_k : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ la projection sur les k premières coordonnées. Soit $f \in G_U$ proche de l'identité. Construisons, par récurrence sur k, des éléments $f_k \in G_{B_k}$ proches de l'identité, f_k préservant le feuilletage F_k, tels que l'on a $\pi_k \circ f \circ f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_k^{-1} = \pi_k$ pour tout k. Si $f_1, \dots, f_{k-1}$ sont donnés, on écrit les composantes : $f \circ f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_k^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, f_{k,k}(x), \dots, f_{k,m}(x))$, et l'on pose $f_k(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, f_{k,k}(x), x_{k+1}, \dots, x_m)$ pour tout x. Si f est proche de l'identité, $f_1, \dots, f_{k-1}$ le sont aussi par hypothèse de récurrence, donc aussi $f \circ f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_k^{-1}$, $f_{k,k}$, et donc f_k. La fonction f_k est $\mathscr{C}^\infty$, vaut l'identité en dehors de $K \subset U$, donc par ouverture de $\mathrm{Diff}_K(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathscr{C}^\infty_K(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (cf. 3.9), si f est suffisamment proche de l'identité, alors f_k est un difféomorphisme, proche de l'identité. De plus, $\pi_k \circ f \circ f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_k^{-1} = \pi_k$ par construction.

Pour $k = m$, on a donc $f \circ f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_m^{-1} = \mathrm{id}$, *i.e.* $f = f_m \circ \cdots \circ f_1$, avec f_k proche de l'identité préservant le feuilletage F_k. Pour tout k, soit $\chi_k : \mathbf{R}^{k-1} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^{m-k} \to V$ un plongement, d'image ouverte A_k, tel que pour tous $x \in]-1,1[^{k-1}$, $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et $y \in]-1,1[^{m-k}$, on ait $\chi_k(x,t,y) = (x, 4t, y)$. En poussant en avant par χ_k le feuilletage en cercles naturel sur $\mathbf{R}^{k-1} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^{m-k}$, on obtient un feuilletage en cercles F'_k sur l'ouvert A_k, prolongeant le feuilletage en droites F_k sur U. Comme f_k préserve F_k et vaut l'identité en dehors de U, f_k préserve F'_k. Par conséquent, f_k induit une famille lisse de difféomorphismes $f_k(x,y) \in \mathrm{Diff}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, proches de l'identité si f l'est.

Par un résultat de perfection lisse de S. Haller et J. Teichmann [HT], qui utilise le théorème d'Herman sur les difféomorphismes du cercle, on en déduit que l'on peut écrire

$$f_k(x,y) = [g_k^1(x,y), h_k^1] \circ [g_k^2(x,y), h_k^2] \circ [g_k^3(x,y), h_k^3] \tag{4.1}$$

où les $g_k^i(x,y)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont des familles lisses de difféomorphismes de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, proches de l'identité, et les h_k^i des éléments de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ proches de l'identité [1]. La famille lisse $g_k^i(x,y)$ induit un difféomorphisme $\widetilde{g}_{ki}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ de A_k, proche de l'identité, qui se prolonge à $\mathbf{R}^n$ car à support compact dans A_k. En outre, si $h_k^i(x,y)$ est une famille lisse d'éléments de $\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$ valant h_k^i sur $\mathrm{supp}(\widetilde{g}_{ki}) \subset A_k$ et id au voisinage de $\mathbf{R}^n \setminus A_k$, elle induit de même un difféomorphisme $\widetilde{h}_{ki}$ de $\mathbf{R}^n$ à support compact dans A_k, proche de l'identité. Enfin, par (4.1), on a :

$$f_k = [\widetilde{g}_{k1}, \widetilde{h}_{k1}] \circ [\widetilde{g}_{k2}, \widetilde{h}_{k2}] \circ [\widetilde{g}_{k3}, \widetilde{h}_{k3}]$$

ce qui conclut la preuve, puisque $f = f_m \cdots f_1$. □

Par le lemme 4.5, nous pouvons donc nous ramener au cas où $M = \mathbf{R}^n$ et $f_n = [g_n, h_n]$ avec g_n, h_n à support dans un même compact et proches de l'identité.

Lemme 4.6. *Il existe des suites ε'_n, k'_n de réels positifs avec $\varepsilon'_n \to 0$ et $k'_n \to \infty$ vérifiant la propriété suivante :*

Pour toutes suites $g_n, h_n \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m)$ à support inclus dans $B(0,2)$ et telles que $d(g_n, \mathrm{id}), d(h_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon'_n$, il existe une partie finie $S \subset \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m)$ telle que :

- (i) *Pour tout n, $[g_n, h_n]$ appartient au sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m)$ engendré par la partie S.*
- (ii) *Pour tout n, $\ell_S([g_n, h_n]) \leqslant k'_n$.*

L'idée de la preuve est « d'encoder » les suites g_n et les h_n dans des difféomorphismes à support compact G et H, la suite ε'_n servant précisément à assurer que G et H sont différentiables.

Démonstration. Notons $B_1 = B(0,1)$ et $B_2 = B(0,2)$. Soit $F_1 \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in B_2$, $F_1(x) = \lambda x$ avec $\lambda < 1$. Soit $F_2 \in G_{B_2}$ tel qu'il existe $a \in \mathbf{R}^m$ avec $\|a\| < 1$ tel que $F_2(x) = x + a$ pour tout $x \in B_1$. Soit enfin $F_3 \in G_{B_2}$ tel que la suite $F_3^n(0)$ soit composée d'éléments deux-à-deux distincts et converge vers $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Soit l_n une suite d'entiers suffisamment grands pour que les ouverts $U_n := F_3^n F_1^{l_n}(B_2)$ soient deux-à-deux disjoints. Posons $\Phi_n := F_3^n F_1^{l_n}$, qui réalise en particulier un difféomorphisme entre B_2 et U_n.

Soit $V = B(0, \frac{1}{3}\|a\|)$, de sorte que, si $W := F_2(V)$, $V \cap W = \varnothing$. On pose, pour tout n, $V_n := \Phi_n(V) \subset U_n$ et $W_n := \Phi_n(W) \subset U_n$, donc $V_n \cap W_n = \varnothing$. On note aussi $F_{2,n} := \Phi_n F_2 \Phi_n^{-1}$, qui laisse stable chaque U_n, envoie V_n sur W_n, et agit comme l'identité en dehors des U_n.

1. $\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})$ agit sur le cercle $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ par : $(g,x) \mapsto \frac{gx}{\|gx\|}$.

Soit enfin $k \geqslant 0$ tel que $F_1^k(B_2) \subset V$, donc $F_2F_1^k(B_2) \subset W$. Ainsi, $\Psi_n^V := \Phi_n F_1^k$ envoie B_2 dans V_n, et $\Psi_n^W := \Phi_n F_2 F_1^k = F_{2,n}\Psi_n^V$ envoie U_n dans W_n.

Soient maintenant $g_n, h_n \in G_{B_2}$ des suites comme dans l'énoncé. On définit alors $G : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ (resp. $H : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$) comme valant $\Psi_n^V g_n \Psi_n^{V-1}$ (resp. $\Psi_n^V h_n \Psi_n^{V-1}$) sur V_n, et l'identité hors de $\bigcup_{n\geqslant 1} V_n$. G et H sont clairement des homéomorphismes, différentiables partout sauf *a priori* en e_1 (où les V_n s'accumulent). En revanche, si l'on choisit ε'_n tendant suffisamment vite vers 0, les conditions $d(g_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon'_n$ et $d(h_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon'_n$ assurent que G et H sont également $\mathscr{C}^\infty$ en e_1, avec $D(G)(e_1) = D(H)(e_1) = \mathrm{id}$, donc sont des difféomorphismes. De plus G, H sont à support inclus dans B_2, et isotopes à l'identité car g_n et h_n le sont.

Il reste à retrouver $[g_n, h_n]$ à partir de ces « encodages ». Notons que le difféomorphisme :

$$[G, F_{2,n}] = GF_{2,n}G^{-1}F_{2,n}^{-1}$$

est à support dans $V_n \cup W_n$, vaut $G = \Psi_n^V g_n \Psi_n^{V-1}$ sur V_n et $F_{2,n}G^{-1}F_{2,n}^{-1} = \Psi_n^W g_n \Psi_n^{W-1}$ sur W_n. Il en va de même pour $[H, F_{2,n}]$ et $[G^{-1}H^{-1}, F_{2,n}]$, donc leur produit $[G, F_{2,n}][H, F_{2,n}][G^{-1}H^{-1}, F_{2,n}]$ vaut $\Psi_n^V g_n h_n (g_n^{-1}h_n^{-1})\Psi_n^{V-1} = \Psi_n^V [g_n, h_n]\Psi_n^{V-1}$ sur V_n, $\Psi_n^W g_n^{-1}h_n^{-1}(g_n^{-1}h_n^{-1})^{-1}\Psi_n^{W-1} = \mathrm{id}$ sur W_n, et l'identité ailleurs, donc :

$$[G, F_{2,n}][H, F_{2,n}][G^{-1}H^{-1}, F_{2,n}] = \Psi_n^V [g_n, h_n]\Psi_n^{V-1}$$

i.e. $[g_n, h_n] = \Psi_n^{V-1}[G, F_{2,n}][H, F_{2,n}][G^{-1}H^{-1}, F_{2,n}]\Psi_n^V$, ce qui démontre le lemme avec $S = \{F_1, F_2, F_3, G, H\}$. □

Preuve du théorème 4.4. Soit K un compact de M, et $B_1, \ldots, B_k$ des boules ouvertes de M qui recouvrent K. Soient ε'_n et k'_n comme dans le lemme 4.6. Par le lemme 4.5, il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que si $d(f_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$, alors f_n est un produit de commutateurs $[g_{n,ij}, h_{n,ij}]$ avec $g_{n,ij}, h_{n,ij} \in G_{B_j}$ tels que $d(g_{n,ij}, \mathrm{id}), d(h_{n,ij}, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon'_n$ dans $B_j \simeq B(0,2) \subset \mathbf{R}^n$. D'où, par le lemme 4.6, une partie finie S_{ij} de G_{D_j}, où $D_j \simeq \mathbf{R}^m$ est une boule contenant $\overline{B_j}$, telle que $[g_{n,ij}, h_{n,ij}] \in S_{ij}$ et $\ell_{S_{ij}}([g_{n,ij}, h_{n,ij}]) \leqslant k'_n$ pour tout n. On a alors le résultat voulu avec $S = \bigcup_{ij} S_{ij}$ et $k_n = (3m) \times k \times 4 \times k'_n$. □

Une conséquence du théorème de Militon, déjà annoncée plus haut, est la proposition suivante. Rappelons que $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$ est dit *récurrent* s'il existe une sous-suite de f^n qui converge vers l'identité.

Corollaire 4.7. *Tout élément récurrent de* $\mathrm{Diff}_c(M)$ *est distordu.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Diff}_K(M)$ récurrent, et soit n_p une suite croissante telle que $n_p \geqslant 2^p k_p$ et $d(f^{n_p}, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_p$. On a par le théorème 4.4 :

$$\frac{\ell_S(f^{n_p})}{n_p} \leqslant \frac{k_p}{n_p} \leqslant \frac{1}{2^p} \to 0\,,$$

donc $\tau_S(f) = 0$ et f est distordu. □

Dans la suite, nous utiliserons le théorème 4.4, beaucoup plus fort (il implique en particulier que f est « arbitrairement distordu »), plutôt que ce corollaire.

Chapitre 5

Normes de difféomorphismes et de métriques

Cette section regroupe un certains nombre de constructions et de résultats techniques sur les difféomorphismes, notamment des résultats de convergence qui utilisent le théorème de Militon. Elle contient l'essentiel du travail technique de la preuve du théorème 1.1 de continuité des morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$. En particulier, le théorème 5.16 est une avancée majeure dans la preuve de la faible continuité : il affirme que si $f_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ converge vers id, la suite $\Phi(f_n)$ admet une sous-suite qui converge vers une isométrie de N pour une certaine métrique. Pour conclure, on montrera dans la partie suivante que $\Phi(f_n)$ ne peut pas converger vers une isométrie de N différente de l'identité.

5.1 Contrôle uniforme des difféomorphismes

Dans cette section, nous allons chercher à obtenir des outils afin de contrôler les difféomorphismes et leurs dérivées successives, de manière uniforme sur la variété. Plus précisément, ces mesures de grandeur des dérivées des difféomorphismes, que nous appellerons de manière impropre mais suggestive des « normes » [1], nous serviront à borner ces dérivées de manière uniforme, afin d'en extraire des sous-suites convergentes.

1. Ces « normes », quoique construites à partir des normes $\mathscr{C}^r$ usuelles, ne définissent pas la topologie $\mathscr{C}^r$. En effet, elles ne permettent pas de repérer des difféomorphismes proches, car leur valeur est minorée. Cela reflète leur usage, qui est orthogonal à celui de la topologie $\mathscr{C}^r$: si celle-ci permet de traiter des difféomorphismes proches et des suites convergentes, les normes nous serviront au contraire à étudier les difféomorphismes lointains et les suites bornées/divergentes.

La définition de ces mesures dépendra de plusieurs choix, à commencer par celui d'une métrique sur la variété, puis de certains recouvrements. Cela n'est pas gênant au vu de l'usage qui en sera fait : le fait qu'une suite (f_n) de difféomorphismes à support dans un même compact K soit bornée pour chacune de ces normes ne dépend pas de ces choix.

5.1.1 Mesure de dilatation-contraction $\|D(f)\|$ d'un difféomorphisme

Dans ce paragraphe, nous montrons que M admet une métrique g qui en fait une variété riemannienne complète, et en déduisons une première norme $\|D(f)\|$ (où $D(f) : TM \to TM$ est l'application tangente du difféomorphisme f) qui quantifie la mesure dans laquelle f dilate ou contracte la métrique g, donc les distances.

Commençons par mentionner le très classique théorème du plongement de Whitney (pour une preuve, se référer à [Hir] ou [Miln]) :

Théorème 5.1 (Whitney, version faible)**.** *Toute variété différentielle M^n se plonge en une sous-variété fermée d'un espace euclidien $\mathbf{R}^d$, pour un certain d.*

(Une version plus forte de ce théorème affirme que $d = 2n$ convient.)

Corollaire 5.2. *Tout variété M admet une métrique qui en fait une variété riemannienne complète.*

Démonstration. Par le théorème de Whitney, nous pouvons identifier M avec une sous-variété fermée d'un espace $\mathbf{R}^d$. Munissons M de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^d$, et notons d^M la distance sur M correspondante. Par définition de la distance géodésique, on a $d^M \geqslant d^{\text{eucl}}|_M$, donc si x_0 est un point quelconque de M, pour tout $r > 0$: $\overline{B}_M(x_0, r) \subseteq \overline{B}_{\mathbf{R}^d}(x_0, r) \cap M$. Ainsi, pour tout $r > 0$, $\overline{B}_M(x_0, r)$ est une partie bornée de $\mathbf{R}^d$; elle est également fermée dans $\mathbf{R}^d$, car fermée dans M, qui est elle-même fermée dans $\mathbf{R}^d$. On en déduit que $\overline{B}_M(x_0, r)$ est compacte pour tout $r > 0$, et donc que (M, g) est complète. $\square$

Dans ce qui suit, nous supposons M munie d'une telle métrique g, et de la distance d qu'elle induit.

Définition 5.3. Si $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, on pose $\|D(f)\|^+ = \sup_{u \in T^1M} \|D(f)u\|$, où T^1M désigne le fibré tangent unitaire de M. Cette quantité est finie car f est à support compact. On pose en outre $\|D(f)\| = \max(\|D(f)\|^+, \|D(f^{-1})\|^+)$.

Cette définition s'interprète simplement en termes métriques, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 5.4. *Si $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, f est $\|D(f)\|^+$-lipschitzienne, et $\|D(f)\|^+$ est la plus petite constante C telle que f soit C-lipschitzienne. Par conséquent, $\|D(f)\|$ est la plus petite constante C telle que, pour tous $x, y \in M$:*

$$\frac{1}{C} d(x,y) \leqslant d(fx, fy) \leqslant C d(x,y) \,.$$

Démonstration. Le fait que f soit $\|D(f)\|^+$-lipschitzienne découle du fait que, pour toute courbe $c : I \subseteq \mathbf{R} \to M$, $\mathrm{long}(f \circ c) \leqslant \|D(f)\|^+ \cdot \mathrm{long}(c)$. Cette constante est optimale : pour le voir, prenons $v \in T^1 M$ tel que $\|D(f)v\| = \|D(f)\|^+$ (v existe par compacité du support de f), $c(t) = \exp(tv)$, et $c_r = c|_{[0,r]}$. On a $\mathrm{long}(c_r) = r$, et $\mathrm{long}(f \circ c_r) = r\|\dot{c}(0)\| + o(r) = r\|D(f)\|^+ + o(r)$ lorsque $r \to 0$, ce qui conclut. □

Lemme 5.5. *Pour toutes $f, g \in \mathrm{Diff}_c(M)$, on a : $\|D(f \circ g)\| \leqslant \|D(f)\| \cdot \|D(g)\|$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la définition et de la règle de la chaîne, ou, alternativement, du fait que $\|D(f)\|$ est la constante de Lipschitz de f. □

5.1.2 Normes $\|\cdot\|_r$

Dans cette section, nous construisons les « normes » $\|\cdot\|_r$ sur les difféomorphismes, qui permettent de borner leurs dérivées successives de manière uniforme sur toute la variété.

Le contrôle à l'ordre 0 est facile à définir : pour $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, on pose $\|f\|_0 = \sup_{x \in M} d(x, f(x))$, qui est le déplacement maximal sur la variété. Celui-ci vérifie, par l'inégalité triangulaire : $\|f \circ g\|_0 \leqslant \|f\|_0 + \|g\|_0$ pour tous $f, g \in \mathrm{Diff}_c(M)$.

Pour le contrôle des dérivées, la construction est plus technique, surtout lorsque l'on cherche à traiter le cas général, *i.e.* le cas où M est non compacte. Si $M = \mathbf{R}^n$ et $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, on pose pour $r \geqslant 1$:

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathbf{R}^n, |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f(x)\|$$

où, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, et $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, et où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$. En particulier, comme on s'en servira dans la preuve du lemme 5.6, si $U \in \mathrm{O}(n)$ est une isométrie de $\mathbf{R}^n$, on a $\|U \circ f\|_r = \|f\|_r$.

Fixons $r \geqslant 1$. Pour définir la « norme » $\|\cdot\|_r$ pour une variété quelconque, nous avoir besoin du lemme suivant. Rappelons qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de M est dite *localement finie* si, pour tout compact K, l'intersection $K \cap A_i$ est vide sauf pour un nombre fini de $i \in I$.

Lemme 5.6. *Il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M et des fonctions $\phi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour tout i, ϕ_i est un difféomorphisme de U_i vers une boule fermée de $\mathbf{R}^n$.*
- (ii) *$(\overset{\circ}{U}_i, \phi_i)_{i\in I}$ est un atlas de cartes de M.*
- (iii) *La famille $(U_i)_{i\in I}$ est localement finie.*
- (iv) *Il existe une constante $C_r > 0$ telle que, pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $\|\phi_i \circ \phi_j^{-1}\|_r \leqslant C_r$.*

Démonstration. Si M est compacte, il suffit de considérer un recouvrement fini de M par des boules fermées contenues dans des cartes de M (qui existe par compacité). Les trois premières propriétés sont automatiquement vérifiées. La dernière l'est également, car pour tous i, j, $\|\phi_i \circ \phi_j^{-1}\|_r < \infty$ par compacité de $U_i \cap U_j$, et car il y a un nombre fini de couples i, j.

Si M est non compacte, il faut prendre garde au fait qu'un tel recouvrement sera infini, et donc procéder plus finement. Nous allons utiliser l'application exponentielle associée à la métrique g de M, qui fournit une application de changement de carte définie partout.

Soit $x_0 \in M$ un point quelconque. Posons, pour $i \in \mathbf{N}$, $K_i = \{x \in M | n \leqslant d(x_0, x) \leqslant n+2\}$; il s'agit d'un recouvrement de M localement fini par des compacts (car M est complète). Par compacité, pour tout i, il existe $r_i > 0$ tel que $\exp_p : \overline{B}_{T_pM}(0, r_i) \to \overline{B}_M(p, r_i)$ soit un difféomorphisme pour tout $p \in K_i$. Quitte à réduire r_i, on peut également supposer que, pour tout $p \in K_i$, il existe une base locale (lisse) de TM sur $B(p, 2r_i)$; l'algorithme de Gram-Schmidt fournit alors une base orthonormée locale de $TB(p, 2r_i)$, donc une famille $(\psi_{p,p'} : \mathbf{R}^n \xrightarrow{\sim} T_{p'}M)_{p'\in B(p,2r_i)}$ d'isométries, lisse par rapport à $p' \in B(p, 2r_i)$. Posons $\psi_p = \psi_{p,p}$, et $\phi_p = \psi_p^{-1} \circ \exp_p^{-1} : \overline{B}_M(p, r_i) \to \overline{B}_{\mathbf{R}^n}(0, r_i)$ qui est un difféomorphisme. Nous allons chercher à contrôler $\|\phi_{p'} \circ \phi_p^{-1}\|_r$, avec p, p' suffisamment proches, par une constante absolue.

Pour tous p, p', l'application de changement de carte $\phi_{p'} \circ \phi_p^{-1} : \overline{B}_{\mathbf{R}^n}(0, r_i) \to \overline{B}_{\mathbf{R}^n}(0, r_i)$ est de la forme $U_{p,p'} \circ \chi_{p,p'}$, où $U_{p,p'} = \psi_{p'}^{-1} \circ \psi_{p,p'} \in \mathrm{O}(n)$ est une isométrie de $\mathbf{R}^n$, et où $\chi_{p,p'} = \psi_{p,p'}^{-1} \circ \exp_{p'}^{-1} \circ \exp_p \circ \psi_p : \overline{B}_{\mathbf{R}^n}(0, r_i) \to \overline{B}_{\mathbf{R}^n}(0, r_i)$

dépend de manière $\mathscr{C}^\infty$ de son argument x et de p', par construction de $\psi_{p,p'}$ et par différentiabilité de $\exp : TM \to M$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_r$ sur $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$\|\phi_{p'} \circ \phi_p^{-1}\|_r = \|U_{p,p'} \circ \chi_{p,p'}\|_r = \|\chi_{p,p'}\|_r\,,$$

qui dépend continûment de p' et vaut $\|\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}\|_r = 1$ en $p' = p$, et est donc inférieure à 2 pour p' suffisamment proche de p. Par compacité de K_i, on peut réduire r_i de manière à ce que pour tous $p, p' \in K_i$ tels que $d(p,p') \leqslant 2r_i$ (*i.e.* tels que $\overline{B}(p,r_i) \cap \overline{B}(p',r_i) \neq \varnothing$), $\|\phi_{p'} \circ \phi_p^{-1}\|_r \leqslant 2$.

Nous pouvons alors extraire un sous-recouvrement fini par des cartes $(U_j, \phi_j)_j$ du recouvrement $(\overline{B}(p,r_i), \phi_p)_p$ de K_i. En prenant la réunion de ces recouvrements, on obtient un recouvrement localement fini de M vérifiant les propriétés voulues, avec $C_r = 2$. □

Dans ce qui suit, on suppose qu'on dispose d'un recouvrement $(U_i, \phi_i)_i$ de M vérifiant les hypothèses du lemme 5.6.

Définition 5.7. Si $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, on pose :

$$\|f\|_r = \sup_{i,j} \|\phi_i \circ f \circ \phi_j^{-1}\|_r\,,$$

le supremum portant sur l'ensemble des indices i, j tels que l'expression ait un sens, c'est-à-dire tels que $f^{-1}(U_i) \cap U_j \neq \varnothing$.

Notons que, pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(M)$, le supremum définissant $\|f\|_r$ est fini : en effet, f étant à support compact, $\phi_i \circ f \circ \phi_j^{-1} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sauf pour un nombre finis d'indices i, j, et par construction des cartes, la famille $(\|\phi_i \circ \phi_j^{-1}\|_r)_{i,j}$ est bornée.

Comme nous l'avons fait remarquer plus tôt, ces normes n'engendrent pas la topologie $\mathscr{C}^r$, et serviront à traiter des suites de difféomorphismes divergentes (ou, au contraire, bornées), et non des suites convergentes ou non.

Lemme 5.8. *Soit $r \geqslant 2$. Il existe une constante $C_r > 0$ telle que, pour toutes $f, g \in \mathrm{Diff}_c(M)$:*

$$\|f \circ g\|_r \leqslant C_r\Big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r}\{1 + \|f\|_l + \|g\|_l\}\Big)^{r+1}.$$

Démonstration. Comme pour la définition de $\|\cdot\|_r$, commençons par le cas où $M = \mathbf{R}^n$. Si $f, g \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n)$, chaque dérivée partielle d'ordre r de $f \circ g$ est la somme d'un nombre C_r (dépendant de r et de n) de termes, qui sont des produits d'au plus $r+1$ dérivées partielles d'ordre au plus r des composantes de f et de g, comme on le montre par une simple récurrence sur r. D'où la majoration :

$$\|f \circ g\,\|_r \leqslant C_r \max_{\alpha \leqslant r} \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r} (\|f\|_l + \|g\|_l)\big)^\alpha \leqslant C_r \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r} \{1 + \|f\|_l + \|g\|_l\}\big)^{r+1}.$$

Passons au cas général. On a par définition $\|f\|_r = \sup_{i,j} \|\phi_i \circ f \circ \phi_j^{-1}\|_r$, le supremum portant sur tous les i, j, avec la convention que $\|\phi_i \circ f \circ \phi_j^{-1}\|_r$ vaut 0 si cette fonction n'est définie nulle part. D'où successivement :

$$\begin{aligned}
\|f \circ g\|_r &= \sup_{i,j} \|\phi_i \circ f \circ g \circ \phi_j^{-1}\|_r \\
&= \sup_{i,j,k} \|\phi_i \circ f \circ \phi_k^{-1} \circ \phi_k \circ g \circ \phi_j^{-1}\|_r \\
&\leqslant \sup_{i,j,k} \; C_r \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r} \{1 + \|\phi_i \circ f \circ \phi_k^{-1}\|_l + \|\phi_k \circ g \circ \phi_j^{-1}\|_l\}\big)^{r+1} \\
&= C_r \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r} \sup_{i,j,k} \{1 + \|\phi_i \circ f \circ \phi_k^{-1}\|_l + \|\phi_k \circ g \circ \phi_j^{-1}\|_l\}\big)^{r+1} \\
&\leqslant C_r \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant r} \{1 + \|f\|_l + \|g\|_l\}\big)^{r+1}
\end{aligned}$$

où la première inégalité résulte du cas $M = \mathbf{R}^n$. □

De ce lemme, nous pouvons déduire une majoration de la norme d'un produit dont les termes sont bornés, en fonction du nombre de termes. Ce résultat technique servira dans la preuve du lemme 5.15, où les s_j appartiendront à une partie finie $S \subset \mathrm{Diff}_c(M)$ fixée. Dans cet énoncé, C_i désigne la constante du lemme 5.8.

Lemme 5.9. *Soient $r \geqslant 1$, $s_1, \ldots, s_k \in \mathrm{Diff}_c(M)$ et $L \geqslant 2$ tel que $\|s_j\|_i + 1 \leqslant L$ et $C_i \leqslant L$ pour tout $i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant k$. On a alors, pour $1 \leqslant i \leqslant r$:*

$$\|s_1 \circ \cdots \circ s_k\|_i \;\leqslant L^{(r+2)^k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 1$, on a bien $\|s_1\|_i \leqslant L$ pour tout $i \leqslant r$ par hypothèse. Supposons l'énoncé vrai jusqu'au rang k, et soient $s_1, \ldots, s_{k+1}$ comme dans l'énoncé. On a alors, en appliquant le lemme 5.8, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_{k+1}\|_i &\leqslant C_i \big(\max_{1 \leqslant l \leqslant i} \{1 + \|s_1\|_l + \|s_2 \circ \cdots \circ s_{k+1}\|_l\}\big)^{i+1} \\
&\leqslant L\big(L + L^{(r+2)^k}\big)^{r+1} \\
&\leqslant L\big(2L^{(r+2)^k}\big)^{r+1} \\
&\leqslant L^{r+2} L^{(r+2)^k(r+1)} \\
&\leqslant L^{(r+2)^k(r+2)} = L^{(r+2)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

$\square$

5.1.3 Un premier résultat de convergence

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, les normes introduites précédemment servent à « borner en norme $\mathscr{C}^r$ pour tout r » des suites de difféomorphismes. Cela permettra d'en extraire une sous-suite convergente pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$ (voir le lemme 5.11 ci-dessous). Commençons par rappeler le classique théorème d'Ascoli, sous une forme qui n'est pas la plus générale mais qui nous suffira :

Proposition 5.10 (Ascoli)**.** *Soient K, E deux espaces métriques, avec K compact. Soit (f_n) une suite de fonctions continues $K \to E$ telles que*

(i) *Pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))$ est incluse dans un compact de E.*

(ii) *La suite f_n est* équicontinue*, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $x, y \in K$ vérifiant $d(x,y) < \delta$, on a $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$.*

Alors f_n admet une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction continue $f \in \mathscr{C}(K, E)$.

Esquisse de preuve. Dans un premier temps, en utilisant l'hypothèse (i), on fait converger une sous-suite f_{n_p} sur une famille dénombrable dense de K par un procédé diagonal. Dans un second temps, en utilisant l'hypothèse (ii) d'équicontinuité, on en déduit que f_{n_p} vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $x \in K$. Par l'hypothèse (i), la suite de Cauchy $(f_{n_p}(x))$ est à valeur dans un espace complet pour tout x, donc converge, donc f_{n_p} converge uniformément sur K vers une fonction $f : K \to E$ automatiquement continue. $\square$

Nous allons employer le théorème d'Ascoli à l'extraction de suites convergentes de difféomorphismes.

Lemme 5.11. *Soit f_n une suite d'éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$. Supposons qu'il existe des constantes $C > 0$ et $C_r > 0$ pour tout $r \geqslant 0$ telles que, pour tout n, $\|D(f_n)\| \leqslant C$ et $\|f_n\|_r \leqslant C_r$. Alors, la suite f_n admet une sous-suite qui converge pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$ vers un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}(M)$ tel que $\|D(f)\| \leqslant C$ et $\|f\|_r \leqslant C_r$ pour tout r.*

Démonstration. Restreignons-nous d'abord à un compact $K \subset M$. Le fait que $\|f_n\|_0 \leqslant C_0$ assure que la suite de fonctions $f_n|_K$ est à valeurs dans un même compact $\overline{B}(K, C_0)$ (qui est compact car la variété M est complète) ; en outre, le fait que $\|D(f_n)\| \leqslant C$ pour tout n implique que les f_n sont C-lipschitziennes, donc que (f_n) est équicontinue. Le théorème d'Ascoli

5.10 fournit alors une sous-suite encore notée f_n (par abus de notation) qui converge uniformément sur K vers une fonction continue $f : K \to M$.

En se plaçant dans des cartes (en nombre fini) rencontrant K, le fait que $\|f_n\|_r$ soit bornée pour tout $r \geqslant 1$ implique que, par extractions successives et procédé diagonal, toutes les dérivées partielles des f_n convergent (à une sous-suite près) uniformément sur chaque compact de carte, avec $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ par convergence uniforme des dérivées. En particulier, une sous-suite de f_n converge en topologie $\mathscr{C}^\infty$ vers f sur K, de sorte que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur K.

En considérant une exhaustion de M par des compacts, c'est-à-dire une suite croissante $(K_i)_{i\geqslant 1}$ de compacts de M telle que $\bigcup_{i\geqslant 1} K_i = M$, on obtient grâce à ce qui précède, par extractions successives et procédé diagonal, une sous-suite encore notée f_n qui converge uniformément sur tout compact, en topologie $\mathscr{C}^\infty$, vers une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(M, M)$, telle que $\|f\|_r \leqslant C_r$ pour tout r.

Reste à montrer que f est un difféomorphisme. Comme $D(f_n)$ converge en tout point vers $D(f)$ par convergence $\mathscr{C}^\infty$, l'inégalité $\|D(f_n)\| \leqslant C$ pour tout n implique que $D(f)$ est inversible en tout point (car $\|D(f)v\| \geqslant \frac{1}{C}\|v\|$ pour tout $v \in TM$). Par le théorème d'inversion locale, f est donc un difféomorphisme local. D'autre part, comme $\|f_n^{-1}\|_0 = \|f_n\|_0 \leqslant C_0$ et $\|D(f_n^{-1})\| = \|D(f_n)\| \leqslant C$, une sous-suite $f_{n_p}^{-1}$ converge aussi uniformément sur tout compact vers une fonction continue $g : M \to M$. Par convergence uniforme sur les compacts, les égalités $f_{n_p} \circ f_{n_p}^{-1} = f_{n_p}^{-1} \circ f_{n_p} = \mathrm{id}$ donnent par passage à la limite $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$. Ainsi f est un difféomorphisme local bijectif, donc un difféomorphisme. □

5.2 Convergence de métriques et de difféomorphismes

Dans cette sous-section, nous franchissons le principal pas en direction de la preuve du théorème 1.1 de continuité des morphismes de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$. On montre en effet que pour toute suite $h_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ qui tend vers id en topologie $\mathscr{C}^\infty$, la suite $\Phi(h_n)$ admet une sous-suite qui converge vers un difféomorphisme de N qui est une isométrie pour une certaine métrique sur N (théorème 5.16).

Après un préliminaire technique sur les métriques, en nous appuyant sur les résultats sur les éléments de distorsion, nous établissons le lemme crucial 5.15, qui permet de contrôler la suite $\Phi(h_n)$ (c'est-à-dire de la borner en norme $\|\cdot\|_r$). Le lemme 5.11 permet alors d'en extraire une sous-suite convergeant vers $h \in \mathrm{Diff}(N)$. Pour construire une métrique invariante par h, on part d'une métrique quelconque, dont on prend les moyennes successives des tirés-en-arrière par les puissances de h. Le contrôle de h et de ses puissances, qui découle du 5.15, joint aux préliminaires sur les métriques, assurent alors que cette suite de métriques converge vers une métrique invariante par h.

Définition-proposition 5.12. Si $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$ est une métrique sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ on pose [2] pour tout $r \geqslant 0$:

$$\|g\|_r = \max_{i,j} \|g_{ij}\|_{\mathscr{C}^r(U)} .$$

En procédant de manière similaire à la démonstration du 5.11, on établit le résultat suivant :

Lemme 5.13. *Soit g_n une suite de métriques sur U, telle qu'il existe des constantes $D_r > 0$ pour tout $r \geqslant 0$ avec $\|g_n\|_r \leqslant D_r$ pour tout n. Alors g_n admet une sous-suite convergeant en topologie $\mathscr{C}^\infty$ (i.e. uniformément sur les compacts, ainsi que les dérivées successives) vers une métrique lisse g (positive mais éventuellement dégénérée) sur U.*

En outre, une simple application de la règle de la chaîne fournit le lemme suivant :

Lemme 5.14. *Soit g une métrique sur U, $h : V \to U$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbf{R}^n$, et C_r, D_r des constantes telles que $\|h\|_r \leqslant C_r$ et $\|g\|_r \leqslant D_r$ pour tout r. Il existe alors des constantes D'_r, ne dépendant que des constantes C_k et D_k pour $k \leqslant r+1$, telles que $\|h^*g\|_r \leqslant D'_r$ pour tout r, où h^*g désigne le tiré-en-arrière de g par h.*

Nous allons maintenant pouvoir établir le lemme crucial suivant, qui est l'aboutissement des résultats sur la distorsion dans les groupes de difféomorphismes obtenus dans la partie 4, et du travail technique établi dans cette partie.

Lemme 5.15. *Soient M, N deux variétés lisses, et $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes. Soit h_n une suite d'éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans un même compact K, et telle que $d(h_n, \mathrm{id}) \to 0$ (où d métrise la topologie de $\mathrm{Diff}_K(M)$, cf. 3.8). Pour tout r, il existe une constante C_r, ne dépendant pas de la suite h_n, telle que $\|\Phi(h_n)\|_r \leqslant C_r$ à partir d'un certain rang. De plus, il existe une constante C telle que $\|D(\Phi(h_n))\| \leqslant C$ à partir d'un certain rang.*

2. Pour simplifier les notations, nous prenons les sup sur U tout entier, et non sur les compacts de U. Telles que définies, ces normes peuvent donc être infinies, mais en pratique elles ne le seront pas car on pourra toujours supposer que U est un ouvert inclus dans un compact de carte.

L'idée de la preuve de ce lemme est la suivante : si des telles constantes n'existent pas, on peut trouver des suites h_n convergeant arbitrairement vite vers l'identité, et telles que $\|\Phi(h_n)\|$ diverge arbitrairement vite. Mais si $h_n \to \mathrm{id}$ suffisamment vite, le théorème de Militon 4.4 implique que h_n appartient à un groupe de type fini, et est de longueur (au sens des longueurs de mots) contrôlée. Φ étant un morphisme de groupes, on en déduit que $\Phi(h_n)$ est également de longueur contrôlée. Enfin, la majoration technique de la norme de produits de difféomorphismes (lemme 5.9) montre que $\|\Phi(h_n)\|$ est également contrôlée, donc ne peut pas diverger arbitrairement vite, d'où la contradiction.

Démonstration. Soient d'abord ε_n et k_n comme dans le théorème 4.4.

Commençons par traiter le cas de la norme $\|D(\cdot)\|$, en raisonnant par l'absurde. Si une constante C comme dans l'énoncé, indépendante de la suite h_n, n'existe pas, on peut trouver pour tout $p \geqslant 1$ une suite $(h_{n,p})_n$ dans $\mathrm{Diff}_K(M)$ qui tend vers 0 et telle que $\limsup_n \|D(\Phi(h_{n,p}))\| \geqslant p$. En posant, pour tout p, $h_p := h_{n_p,p}$ tel que $d(h_{n_p,p}, \mathrm{id}) \leqslant \frac{1}{p}$ et $\|D(\Phi(h_{n_p,p}))\| \geqslant p-1$, on obtient une suite h_p de $\mathrm{Diff}_K(M)$ tendant vers id et telle que $g(p) := \|D(\Phi(h_p))\|$ tend vers l'infini. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d(h_p, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_p$ et que $\lim_{p\to\infty} \frac{\ln g(p)}{k_p} = \infty$.

Par le théorème 4.4, il existe une partie finie $S = \{s_1, \dots, s_q\}$ de $\mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $l_n := \ell_S(h_n) \leqslant k_n$. On peut alors écrire $h_n = s_{i_1} \dots s_{i_{l_n}}$, donc $\Phi(h_n) = s'_{i_1} \dots s'_{i_{l_n}}$, où $s'_i = \Phi(s_i)$ pour $i = 1, \dots, q$. Si $L = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \|D(s'_i)\|$, on a alors, en utilisant l'inégalité $\|D(f \circ g)\| \leqslant \|D(f)\| \cdot \|D(g)\|$:

$$g(n) = \|D(\Phi(h_n))\| \leqslant \|D(s'_{i_1})\| \dots \|D(s'_{i_{l_n}})\| \leqslant L^{l_n} \leqslant L^{k_n}$$

ce qui contredit le fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln g(n)}{k_n} = \infty$.

Venons-en maintenant au cas des normes $\|\cdot\|_r$, qui se traitent de manière similaire. Le cas de la norme $\|\cdot\|_0$ est plus simple encore que celui de la norme $\|D(\cdot)\|$, grâce à l'inégalité $\|f \circ g\|_0 \leqslant \|f\|_0 + \|g\|_0$ qui donne la majoration $\|\Phi(h_n)\| \leqslant L \cdot l_n$. Supposons à présent $r \geqslant 1$, et supposons qu'une constante C_r comme dans l'énoncé n'existe pas. Comme précédemment, on obtient une suite $h_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $d(h_n, \mathrm{id}) \to 0$ et $\|h_n\|_r \to \infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $d(h_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$ et $g(n) := \|h_n\|_r$ vérifie :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log g(n)}{k_n} = \infty\,. \tag{5.1}$$

Par le théorème de Militon, on montre comme précédemment qu'il existe une partie $S' = \{s'_1, \dots, s'_q\} \subset \mathrm{Diff}_c(N)$ finie telle qu'on puisse écrire $\Phi(h_n) =$

$s'_{i_1} \dots s'_{i_{l_n}}$ avec $l_n \leqslant k_n$. Soit $L > 0$ telle que $L \geqslant \|s'\|_j$ pour tout $s' \in S'$ et $j = 1, \dots, r$ et qui vérifie les hypothèses du lemme 5.9. En appliquant ce lemme, on obtient :

$$g(n) = \|\Phi(h_n)\|_r \ = \|s'_{i_1} \cdots s'_{i_{l_n}}\|_r \leqslant L^{(r+2)^{k_n}}$$

d'où :

$$\log\log g(n) \leqslant \log[(\log L)(r+2)^{k_n}] = \log\log L + k_n \log(r+2)$$

et donc $\limsup \frac{\log\log g(n)}{k_n} \leqslant \log(r+2)$, ce qui contredit (5.1). □

Théorème 5.16. *Soient M, N deux variétés lisses, et $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes. Soit (h_n) une suite de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans un même compact $K \subset M$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} d(h_n, \mathrm{id}) = 0\,.$$

Alors il existe une sous-suite de $(\Phi(h_n))$ qui converge au sens $\mathscr{C}^\infty$ vers un difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}(N)$, qui est une isométrie pour une certaine métrique g sur N.

Démonstration. La preuve procède en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous montrons l'existence de la limite $h \in \mathrm{Diff}(N)$, et contrôlons ses puissances successives. Nous construisons dans un second temps une suite de métriques g_n à partir des puissances de h, dont nous montrons qu'elle admet une sous-suite convergeant vers une métrique g' sur N. Enfin, dans un dernier temps, nous vérifions que h est une isométrie de g'.

1 - Existence et contrôle de h. Par le lemme 5.15, il existe des constantes $C, C_r > 0$ pour tout $r \geqslant 0$, indépendantes de la suite h_n, telles que $\|D(\Phi(h_n))\| \leqslant C$ et, pour tout r, $\|\Phi(h_n)\|_r \leqslant C_r$ à partir d'un certain rang. Par le lemme 5.11, on en déduit que la suite $\Phi(h_n)$ admet une sous-suite convergeant en topologie $\mathscr{C}^\infty$ vers $h \in \mathrm{Diff}(N)$ tel que $\|h\|_r \leqslant C_r$ et $\|D(h)\| \leqslant C$.

En outre, comme les constantes C et C_r ne dépendent pas de la suite (h_n), et comme la suite (h_n^k) de $\mathrm{Diff}_K(M)$ tend également vers id pour $k \in \mathbf{N}$, on en déduit que pour tout k et pour tout r, $\|\Phi(h_n)^k\|_r = \|\Phi(h_n^k)\|_r \leqslant C_r$ à partir d'un certain rang, d'où en prenant la limite : $\|h^k\|_r \leqslant C_r$ et $\|D(h^k)\| \leqslant C$ pour tout k.

2 - Construction de la métrique g'. Soit g une métrique quelconque sur N. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$g_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (h^k)^* g\,,$$

où h^*g désigne le tiré-en-arrière de g par h. Du fait que $\|D(h^k)\| \leqslant C$ pour tout k, on déduit que, pour tout $v \in TM$, $\frac{1}{C^2}\|v\|^2 \leqslant g_n(v,v) \leqslant C^2\|v\|^2$. En particulier, si une sous-suite de g_n converge, sa limite est définie positive, donc est également une métrique.

Soit (U_i, ϕ_i) un recouvrement de M par des cartes satisfaisant les propriétés du lemme 5.6 (en particulier, U_i est une boule fermée de M), à partir duquel sont définies les normes $\|\cdot\|_r$ sur $\mathrm{Diff}_c(M)$. Pour montrer que g_n admet une sous-suite convergente (au sens $\mathscr{C}^\infty$), il suffit d'obtenir une sous-suite convergente dans chaque carte U_i, car on peut alors par extractions successives et procédé diagonal obtenir une sous-suite convergente sur tout M.

Pour tout i et toute métrique g sur M, soit $g^i = (\phi_i^{-1})^* g_n$, qui est une métrique sur $\phi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$. On cherche à obtenir une sous-suite convergente de $g_n^i = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n ((h^k)^*g)^i$. Tout d'abord, comme $\|h^k\|_0 \leqslant C_0$ pour tout k, l'ensemble $\bigcup_{k\geqslant 0} h^k(U_i)$ est borné[3], donc inclus dans compact, donc ne rencontre qu'un nombre fini de U_j, mettons U_l pour $1 \leqslant l \leqslant j$. Soit $D_r = \max_{1\leqslant l\leqslant j}\|g^l\|_r$. Soit $x \in \overset{\circ}{U}_i$, et l tel que $h^k(x) \in \overset{\circ}{U}_l$. Sur un voisinage de x, on a : $((h^k)^*g)^i = (\phi_i^{-1})^*(h^k)^*(\phi_l)^*g^l = (\phi_l \circ h^k \circ \phi_i^{-1})^*g^l$. Or, par définition de $\|\cdot\|_r$, $\|\phi_l \circ h^k \circ \phi_i^{-1}\|_r \leqslant \|h^k\|_r \leqslant C_r$, et $\|g^l\|_r \leqslant D_r$, donc par le lemme 5.14, il existe une constante D'_r ne dépendant que des C_m, D_m pour $m \leqslant r+1$ (donc pas de k) telle que $\|((h^k)^*g)^i\|_r \leqslant D'_r$ pour tout k. Par conséquent, $\|g_n^i\|_r \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \|((h^k)^*g)^i\|_r \leqslant D'_r$ pour tout n. Par le lemme 5.13, on en déduit que g_n^i admet une sous-suite convergente, ce qui conclut.

On note g' la métrique limite sur M d'une sous-suite de g_n.

3 - h est une isométrie de g'. On a pour tout n, tout r, et tout i, en utilisant le fait que pour $\|((h^k)^*g)^i\|_r \leqslant D'_r$ pour tout k :

$$\|(h^*g_n - g_n)^i\|_r = \frac{1}{n+1}\left\|((h^{n+1})^*g)^i - g^i\right\|_r \leqslant \frac{2D'_r}{n+1}.$$

En fait tendre n vers l'infini le long d'une sous–suite convergente, on obtient $h^*g' = g'$ sur toute carte U_i, donc sur M. □

3. Pour la distance induite par la métrique complète sur M fixée en début de partie, qui permet de définir $\|D(\cdot)\|$ et $\|\cdot\|_0$. Cette métrique étant complète, les parties bornées de M sont relativement compactes.

Chapitre 6

Continuité faible des morphismes de groupes

Fort des résultats techniques de la partie précédente, nous expliquons dans cette partie comment conclure la preuve du théorème 1.1. Grâce au théorème 3.29, cela permet de déterminer tous les morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$: il s'agit exactement des morphismes topologiquement diagonaux étendus.

6.1 Constructions sur les actions de groupes sur des variétés

Nous allons introduire deux constructions géométriques sur les variétés qui « passent » aux actions de groupes : l'éclatement (*blowing-up* en anglais) et le recollement. La première fournit une variété à bord à partir d'une variété sans bord, tandis qu'au contraire la seconde permet d'obtenir une variété sans bord à partir de deux variétés dont les bords sont difféomorphes.

6.1.1 Éclatement

Commençons par des constructions de bases sur les fibrés vectoriels. Si $\xi : E \to B$ est un fibré vectoriel, le fibré *unitaire* associé à ξ est le fibré dont la fibre en b est l'espace $E_b/\mathbf{R}_+^*$ des demi-droites de E_b. Par passage au quotient, tout morphisme ϕ de fibrés vectoriels injectif sur chaque fibre induit un morphisme $\overline{\phi}$ de fibrés (différentiels) entre leurs fibrés unitaires, et ces morphismes se composent : $\overline{\phi \circ \psi} = \overline{\phi} \circ \overline{\psi}$. De plus, si le fibré vectoriel E est muni d'une métrique, le fibré unitaire s'identifie naturellement au sous-fibré constitué des éléments normés de E, et $\overline{f}$ est simplement : $v \mapsto \frac{D(f)v}{\|D(f)v\|}$.

De même, si $L \subset N$ est une sous-variété de codimension positive, le fibré *normal* de L dans N est le fibré vectoriel quotient $i^*(TN)/TL$ où $i : L \hookrightarrow N$ est l'inclusion, et $i^*(TN)$ le tiré-en-arrière à L du fibré tangent de N. Posons :

$$\mathrm{Diff}_c(N, L) = \{f \in \mathrm{Diff}_c(N) \mid f(L) = L\}\,.$$

Pour tout élément $f \in \mathrm{Diff}_c(N, L)$, sa différentielle $D(f)$ induit un isomorphisme de i^*TN qui vérifie $D(f)(TL) = TL$, donc induit un isomorphisme $f^\perp$ du fibré normal de L dans N. De plus, la règle de la chaîne implique : $(f \circ g)^\perp = f^\perp \circ g^\perp$.

Si de plus N est munie d'une métrique g, le fibré normal de L dans N s'identifie au fibré orthogonal de L dans N, soit $(TL)^\perp$, constitué en tout point $p \in L$ de l'orthogonal de T_pL dans T_pN pour g_p. Ce fibré est muni de la (restriction de la) métrique g.

Par ce qui précède, si L est une sous-variété de N, on peut définir son *fibré unitaire normal* $N(L)$, c'est-à-dire le fibré unitaire du fibré normal de L dans N. Il s'agit d'un fibré différentiel sur L, donc en particulier d'une variété différentielle, compacte si N et L le sont (par compacité de la base L et des fibres qui sont des sphères). De plus, toute $f \in \mathrm{Diff}_c(N, L)$ induit un isomorphisme $N(f)$ du fibré $N(L)$, donc en particulier un difféomorphisme de $N(L)$. De plus, $N(f)$ est à support compact car $D(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ et car chaque fibre du fibré normal unitaire est difféomorphe à S^{d-1} (où d est la codimension de $L \subset N$), donc compacte. Enfin, une isotopie (à support compact) de id à f induit une isotopie de id à $N(f)$, donc $N(f) \in \mathrm{Diff}_c(N(L))$. Or d'après les points précédents, $N(f \circ g) = N(f) \circ N(g)$, on dispose donc d'un morphisme de groupes $N : \mathrm{Diff}_c(N, L) \to \mathrm{Diff}_c(N(L))$.

Par ailleurs, si N est munie d'une métrique g, le fibré unitaire normal $N(L)$ s'identifie naturellement au fibré constitué des éléments normés de $(TL)^\perp$. Nous alternerons entre les deux représentations de $N(L)$ en fonction du contexte.

Nous pouvons maintenant construire l'*éclatement* N^σ de N le long de L. Intuitivement, il s'agit d'une variété de bord $\partial N^\sigma = N(L)$ et d'intérieur $N \setminus L$, obtenue en remplaçant $L \subset N$ par $N(L)$, l'ensemble des directions partant de L. En d'autres termes, N^σ est obtenu en compactifiant $N \setminus L$ par $N(L)$. Précisons cette définition :

Définition 6.1 (Éclatement)**.** Soit L une sous-variété fermée de codimension positive d'une variété compacte N. Munissons N d'une métrique g, et identifions $N(L)$ à l'ensemble des éléments normés de $(TL)^\perp$. Par le théorème du voisinage tubulaire, l'application $p_0 : N(L) \times]0, \varepsilon[\to N \setminus L$ définie par

$p_0(v,t) = \exp(tv)$ est, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, un difféomorphisme de $N(L) \times]0, \varepsilon[$ vers un voisinage de L dans N privé de L. On définit l'espace topologique :

$$N^\sigma = ((N(L) \times [0, \varepsilon[) \cup (N \setminus L))/p_0\,,$$

que l'on appelle l'*éclatement de N le long de L*. On vérifie de manière élémentaire, en utilisant que p_0 est un homéomorphisme, que les applications canoniques $N(L) \times [0, \varepsilon[\to N^\sigma$ et $N \setminus L \to N^\sigma$ sont des homéomorphismes sur leurs images respectives, qui sont des ouverts de N^σ (qui le recouvrent). On peut munir N^σ d'une structure de variété à bord lisse en utilisant ces homéomorphismes comme cartes, puisque l'application de changement de cartes est $p_0 : N(L) \times]0, \varepsilon[\to p_0(N(L) \times]0, \varepsilon[\,) \subset N \setminus L$, qui est un difféomorphisme.

Exemple. Si $N = \mathbf{R}^3$ et L est un plan, $N^\sigma \simeq \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid |z| \geqslant 1\}$; si $N = \mathbf{R}^3$ et L est une droite, $N^\sigma \simeq \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$.

Nous avons ainsi associé à un couple (N, L), où $L \subset N$ est une sous-variété de codimension positive, une variété à bord lisse compacte N^σ, de bord $N(L)$ comme on le vérifie dans les cartes. On dispose en outre d'une application naturelle $\pi : N^\sigma \to N$, qui envoie $N(L)$ sur L, dont on vérifie dans les cartes qu'elle est lisse.

Pour que cette construction nous soit utile, nous devons montrer que l'éclatement « passe aux difféomorphismes », ce que fait le lemme suivant :

Lemme 6.2. *Il existe un unique morphisme de groupes* $\sigma : \mathrm{Diff}_c(N, L) \to \mathrm{Diff}_c(N^\sigma)$ *tel que, pour tout* $h \in \mathrm{Diff}_c(N, L)$, *en notant* $h^\sigma := \sigma(h)$, *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} N^\sigma \arrow[r, "h^\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & N^\sigma \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "h"'] & N \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'unicité vient de ce que, puisque π vaut l'identité sur $N \setminus L$, donc l'égalité $\pi \circ h^\sigma = h \circ \pi$ détermine h^σ sur la partie dense $N \setminus L$ de N^σ, donc sur N^σ.

Pour l'existence, on définit $h^\sigma(x) = h(x)$ sur $x \in N \setminus L$, et $h^\sigma(x) = N(h)(x)$ sur $N(L)$. On a clairement $\pi \circ h^\sigma = h \circ \pi$ par définition. De plus, $\mathrm{id}^\sigma = \mathrm{id}$, et $(h_1 \circ h_2)^\sigma = h_1^\sigma \circ h_2^\sigma$ car $h \mapsto N(h)$ est un morphisme de groupes. Il reste à établir que h^σ est lisse (car alors $h^\sigma \in \mathrm{Diff}_c(N^\sigma)$ et σ est un morphisme de groupes). h^σ est lisse sur $N \setminus L$, et l'on vérifie en utilisant la définition de p_0 et le fait que $\exp_p$ est un difféomorphisme local et que $D(\exp_p)(0)v = v$ pour tout $p \in L$ et $v \in T_pN$ que h^σ est également lisse en tout point de $N(L)$. $\square$

6.1.2 Recollement

Soient N_1 et N_2 deux variétés compactes à bords, et soit $\alpha : \partial N_1 \xrightarrow{\sim} \partial N_2$ un difféomorphisme. On définit le *recollement* de N_1 et N_2 le long de leurs bords via α, noté N, comme étant l'espace topologique quotient de $N = N_1 \cup N_2$ par la relation engendrée par $y \sim \alpha(x)$ pour $x \in \partial N_1$ et $y \in \partial N_2$. Si $f_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$ coïncident sur les bords, *i.e.* $f_2 = \alpha \circ f_1 \circ \alpha^{-1}$, l'application induite par $f_1 \cup f_2$ passe au quotient et définit un homéomorphisme.

Pour définir une structure différentielle sur N, on a besoin d'un prolongement de α en un difféomorphisme entre des voisinages des bords, qui permet en particulier d'identifier les fibrés normaux de ∂N_i dans N_i pour $i = 1, 2$. La structure lisse induite dépend du choix du prolongement de α, mais deux telles structures sont naturellement difféomorphes.

En revanche, si l'on recolle deux difféomorphismes de f_1, f_2 le long des bords, on n'obtient pas en général un difféomorphisme de N : en effet, les différentielles de difféomorphismes $f_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$ sur ∂N_i coïncident sur l'hyperplan $T(\partial N_i)$, mais pas sur N_i, car on peut toujours s'arranger pour leur donner une valeur arbitraire sur un supplémentaire de $T(\partial N_i)$ dans TN_i. De manière plus imagée, les mouvements transverses des f_i ne coïncident pas en général, et le recollement n'est pas différentiable.

Par exemple, si $N_1 = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$, $N_2 = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^-$ et $\alpha(x, t) = (x, -t)$ sur le voisinage $\mathbf{R}^n \times [0, \varepsilon[$ de $\mathbf{R}^n \times \{0\} = \partial N_1$, N est la variété lisse $\mathbf{R}^{n+1}$ munie de sa structure lisse standard. En revanche, si $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$, les transvections $f_i(x, t) = (x + tv_i, t)$ de N_i ne se recollent en un difféomorphisme de N que si $v_1 = v_2$.

Cependant, un résultat technique (cf. [Par]) permet de recoller ces difféomorphismes, après modification de la structure différentielle le long de ∂N_i, en un difféomorphisme de N, de manière systématique :

Théorème 6.3 (Parkhe)**.** *Il existe des homéomorphismes Ψ_1 et Ψ_2 de N_1 et N_2 qui satisfont les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour $i = 1, 2$, si $f_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$, alors $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$.*
- (ii) *Si deux difféomorphismes $f_1 \in \mathrm{Diff}_c(N_1)$ et $f_2 \in \mathrm{Diff}_c(N_2)$ coïncident sur $\partial N_1 \simeq \partial N_2$, alors l'application f définie sur N par recollement des difféomorphismes $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^\infty$ de N.*

Remarque. Ce recollement est compatible par composition : si $f_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$ et $g_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$ coïncident sur les bords, et se recollent en $f, g \in \mathrm{Diff}_c(N)$ ($f = \Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ et $g = \Psi_i^{-1} g_i \Psi_i$ sur N_i), alors $f \circ g$ est le recollement de $f_i \circ g_i$ (car $fg = \Psi_i^{-1} f_i g_i \Psi_i$ sur N_i).

Démonstration. L'idée est la suivante : on prend Ψ_i lisse (mais de réciproque non lisse au bord) qui « écrase » très rapidement les points de N_i proches du bord, *i.e.* les rapproche très fortement de ∂N_i. Dans ces conditions, la composante transverse de $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ disparaît, *i.e.* est déterminée et ne dépend pas de f_i, de sorte que les composantes transverses de $\Psi_1^{-1} f_1 \Psi_1$ et $\Psi_2^{-1} f_2 \Psi_2$ soient les mêmes quelles que soient f_1, f_2 qui coïncident sur le bord.

Plus précisément, par une carte locale en ∂N_i, on se ramène au cas où $N_i = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ et l'on va définir Ψ à support dans $\mathbf{R}^n \times [0, K]$ pour le prolonger par l'identité au-delà de la carte. On pose : $\Psi_i(x,t) = (x, \psi(t))$, où $\psi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ est un homéomorphisme $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, dont la restriction à $\mathbf{R}_+^*$ est un difféomorphisme, et tel que $\psi(t) \to 0$ très rapidement lorsque $t \to 0^+$ (par exemple, $\psi(t) = \exp(-\frac{1}{t})$ au voisinage de 0, et $\psi(t) = t$ pour t grand).

Montrons que si $f_i \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n)$, $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ est $\mathscr{C}^\infty$. Notons $f_i = (f_i^x, f_i^t)$ les composantes de f_i, qui sont lisses. Alors :

$$\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i(x,t) = \big(f_i^x(x, \psi(t)), \psi^{-1}(f_i^t(x, \psi(t))\big) \tag{6.1}$$

La première composante est lisse par composition ; pour la seconde, il faut prendre garde au fait que ψ^{-1} n'est pas lisse en 0 (elle étire trop rapidement). Comme f_i^t est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$, la fonction $\lambda_i : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\lambda_i(x,t) = \frac{f_i^t(x,t)}{t}$ si $t > 0$ et $\lambda_i(x,0) = \frac{\partial f_i^t}{\partial t}(x,0)$ est $\mathscr{C}^\infty$, et l'on a pour tout (x,t) avec $t > 0$,

$$\psi^{-1}(f_i^t(x,\psi(t)) = -\frac{1}{\log\{\lambda_i(x,\psi(t))\psi(t)\}} = -\frac{1}{\log\{\lambda_i(x,\psi(t))\} - \frac{1}{t}} = \frac{t}{1 - t\log\{\lambda_i(x,\psi(t))\}} \tag{6.2}$$

Or λ_i est lisse et strictement positive sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ (car $f_i^t(x,t) > 0$ si $t > 0$ et $\frac{\partial f_i^t}{\partial t}(x,0) > 0$ car f_t^i est un difféomorphisme qui laisse stable $\mathbf{R}^n \times \{0\}$), donc les fonctions en (x,t) de droite et de gauche sont aussi définies pour $t = 0$. Comme elles sont continues (car ψ est un homéomorphisme) et coïncident sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^*$, elles coïncident également sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ par densité. Or la fonction de droite est lisse, donc celle de gauche aussi. Ainsi $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ est lisse, donc aussi $\Psi_i^{-1} f_i^{-1} \Psi_i$, donc $\Psi_i^{-1} f_i \Psi_i$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

Enfin, soient $f_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i) = \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+)$, $i = 1, 2$, qui coïncident sur le bord $\mathbf{R}^n \times \{0\}$, *i.e.* (comme $\alpha = \mathrm{id}$) $f_1(x,0) = f_2(x,0) = g(x)$. Pour montrer que le recollement des fonctions $\Psi_i^{-1} f_i^{-1} \Psi_i$, qui est un homéomorphisme, est $\mathscr{C}^\infty$, comme $\Psi_i^{-1} f_i^{-1} \Psi_i$ est lisse sur chaque N_i, il suffit de montrer que leurs dérivées successives coïncident sur $\mathbf{R}^n \times \{0\}$.

Raisonnons sur chaque composante dans (6.1). Pour la première, comme $\psi^{(p)}(0) = 0$ pour tout p, toute dérivée partielle $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left[f_i^x(x, \psi(t))\right](x,0)$ avec

$p \geqslant 1$ est égale à 0 ; en outre, $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[f_i^x(x,\psi(t))\right](x,0) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[g(x)\right](x,0)$, donc les dérivées successives de la composante en x sont égales. Pour la composante en t, les formules (6.1) et (6.2) montrent qu'elle est égale à $-\frac{1}{\rho_i(x,t)}$ avec $\rho_i(x,t) = \log\{\lambda_i(x,\psi(t))\} - \frac{1}{t}$. Par la règle de la chaîne, il suffit de montrer que toutes les dérivées partielles successives de ρ_1 et ρ_2 coïncident en $(x,0)$. Par somme et par la règle de la chaîne, il suffit à nouveau de le montrer pour $\lambda_i(x,\psi(t))$. Or, cela se montre exactement comme précédemment avec la première composante $f_i^x(x,\psi(t))$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Comme nous l'avons observé, la construction du recollement via (Ψ_1,Ψ_2) a le mérite de se composer. Cela permet d'énoncer :

Corollaire 6.4. *Soient N_1, N_2 deux variétés à bord, $\alpha : \partial N_1 \xrightarrow{\sim} \partial N_2$ un difféomorphisme, et soient N le recollement de N_1 et N_2 via α. Soient de plus Ψ_1, Ψ_2 des homéomorphismes respectifs de N_1, N_2 comme dans le théorème 6.3. Si G est un groupe agissant par difféomorphismes sur N_1 et N_2 tel que l'action coïncide sur $\partial N_1 \simeq \partial N_2$, alors G agit par difféomorphismes sur N par recollement des $\Psi_i^{-1} g \Psi_i \in \mathrm{Diff}_c(N_i)$.*

6.2 Preuve de la continuité faible

Les constructions d'éclatement et de recollement acquises, nous disposons à présent de tous les outils nécessaires à la preuve du théorème 1.1. Nous souhaitons montrer que, si N est compacte (ce que nous supposerons toujours à partir de maintenant), tout morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu. Quitte à considérer séparément chacune des composantes connexes de N (en nombre fini), on peut supposer que N est connexe.

6.2.1 Principe de la preuve

Si B est une boule de M, rappelons que l'on note G_B le groupe des éléments de $\mathrm{Diff}_c(M)$ à support dans B. Nous avons vu dans le lemme 3.15 (qui découle du lemme de fragmentation 3.11) que si B est une boule de M, le morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu si et seulement si la restriction de Φ à G_B est faiblement continue (ou continue, comme B est relativement compacte).

Nous utiliserons à de multiples reprises le critère suivant, qui découle du lemme 5.16 :

Lemme 6.5. *Soit B une boule de M. Le morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu si et seulement s'il n'existe pas de suite*

$f_n \in G_B$ telle que $f_n \to$ id et $\Phi(f_n) \to A$, où A est une isométrie non triviale d'une métrique sur N.

Démonstration. Le sens direct est clair, puisque $\overline{B}$ est compacte. Pour la réciproque (qui est le sens utile), l'hypothèse implique, par le lemme 5.16, que pour toute suite $f_n \in G_B$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$, la suite $\Phi(f_n)$ admet une sous-suite qui converge vers l'identité. En particulier, toute sous-suite de $\Phi(f_n)$ admet une sous-suite qui converge vers id, donc $\Phi(f_n) \to \mathrm{id}$. Ainsi, la restriction de Φ à G_B est faiblement continue, donc Φ est faiblement continu par ce qui précède. □

La preuve du théorème 1.1 procède, dans les grandes lignes, comme suit. Nous procédons par récurrence sur $\dim(N)$. Si Φ n'est pas continu, et si B est une petite boule de M, on peut trouver une suite $f_n \in G_B$ convergeant vers l'identité telle que $\Phi(f_n)$ converge vers une isométrie non triviale A de N (pour une certaine métrique).

Si B' est une boule de M disjointe de B, les actions sur N de $G_{B'}$ et de A commutent. Par conséquent, si l'ensemble L des points fixes de A est non trivial, alors $G_{B'}$ préserve L. Nous verrons que L est une sous-variété fermée de N, et l'on peut donc éclater l'action de $G_{B'}$ le long de L. Par un recollement astucieux de l'action de $G_{B'}$ sur N^σ avec d'autres actions, on se ramène au cas de la dimension inférieure.

Si au contraire A agit librement sur L, en posant $H = \overline{\langle A \rangle}$ le sous-groupe fermé engendré par A, $G_{B'}$ agit sur la variété quotient $N' = N/H$. Si A est d'ordre infini, H est de dimension positive, et donc N' est de dimension strictement inférieure à N, donc l'action sur N' est faiblement continue. En outre, si p est un point de N, on peut trouver une boule $B'' \subset B'$ telle que $G_{B''}$ laisse stable l'orbite $H \cdot p$, également de dimension inférieure à $\dim(N)$. On conclut alors en arguant que N' et $H \cdot p$ sont « supplémentaires ».

Si A est d'ordre fini, on va construire un groupe infini $\widehat{H}$ qui commute à $G_{B'}$ en itérant ce procédé. On construit également une métrique sur N invariante par $\widehat{H}$ en moyennant et en procédant comme dans la partie 5.2. Cela nous ramène alors au cas précédent, ce qui conclut la preuve.

6.2.2 Le groupe des isométries d'une variété compacte

Dans la preuve, nous serons amenés à travailler avec le groupe des isométries de N. Nous rassemblons donc ici les résultats qui nous serviront sur le groupe $\mathrm{Isom}(N)$ des isométries d'une variété compacte N.

Soit $G = \mathrm{Isom}(N)$ le groupe des isométries de la variété riemannienne compacte N. G est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(N)$. Par le théorème d'Ascoli-Arzela 5.10, le groupe topologique G est compact pour la topologie $\mathscr{C}^1$. En fait, il résulte du fait que toute isométrie métrique de N est lisse (donc est une isométrie riemannienne) et du théorème d'Ascoli-Arzela que le groupe topologique G est compact pour la topologie compacte-ouverte. En particulier, la topologie compacte-ouverte et la topologie $\mathscr{C}^1$ coïncident sur G, et l'on verra plus bas que celles-ci coïncident avec la topologie $\mathscr{C}^\infty$.

Puisqu'une variété compacte est complète, deux points quelconques de N sont joints par une géodésique. Comme une géodésique est uniquement déterminée par son point de départ et sa vitesse initiale, et comme une isométrie envoie une géodésique sur une géodésique, une isométrie f de N est déterminée de manière unique par l'image d'un point $p \in N$ et par sa différentielle en ce point $Df(p) : T_pN \to T_{f(p)}N$ qui est une isométrie. Ceci suggère que le groupe topologique G est de dimension finie, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 6.6 (Myers-Steenrod)**.** *Il existe une unique structure lisse sur G, muni de la topologie compacte-ouverte, qui en fasse un groupe de Lie. De plus, pour cette structure, l'action de G sur N est lisse en tant qu'application $G \times N \to N$.*

En particulier, G est un groupe de Lie compact, et l'inclusion $G \to \mathrm{Diff}(N)$ est continue.

Concluons cette section de rappels par un résultat classique qui nous servira dans la preuve :

Lemme 6.7. *Soit H un sous-groupe non trivial de $G = \mathrm{Isom}(N)$. Alors l'ensemble $\mathrm{Fix}(H)$ des points fixés par H est une sous-variété fermée de N de codimension positive.*

Démonstration. Soit $F = \mathrm{Fix}(H)$; si F est vide, le résultat est vrai. Supposons maintenant que $p \in F$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, en posant $U = B_{T_pN}(0, \varepsilon)$ et $U' = \exp_p(U) = B_N(p, \varepsilon)$, l'exponentielle $\exp_p : U \to U'$ soit un difféomorphisme. Pour tout $h \in H$, on a $h(p) = p$ donc, par unicité des géodésiques à position et vitesse initiales fixées, $h(\exp_p(v)) = \exp_p(D_ph(v))$. On en déduit que $F \cap U' = \exp_p(W \cap U)$, où W est l'ensemble des vecteurs $v \in T_pN$ qui sont fixés par tous les D_ph, avec $h \in H$. Mais W est clairement un sous-espace vectoriel de T_pN, distinct de T_pN car $H \neq \{\mathrm{id}\}$ (si $h \in H \setminus \{\mathrm{id}\}$, on a $D_ph \neq \mathrm{id}$). Comme $\exp_p : U \to U'$ est un difféomorphisme qui envoie $W \cap U$ sur $F \cap U'$, on en déduit que F est une sous-variété de codimension positive de N. De plus, par définition, F est clairement fermée. $\square$

6.2.3 Preuve du théorème 1.1

Venons-en à la démonstration à proprement parler. Par le lemme 3.15, si B est une boule de M telle que la restriction de $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ à G_B soit faiblement continue, alors Φ est faiblement continu. Ceci montre que, pour démontrer le théorème 1.1, il suffit de le montrer lorsque $M \simeq \mathbf{R}^m$:

Théorème 6.8. *Si N est une variété compacte, tout morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ est faiblement continu.*

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur $n = \dim(N)$, le cas $n = 0$ étant trivial. Quant au cas $n = 1$, il se réduit au cas $N = S^1$, qui est traité dans [Man].

Supposons à présent que $\Phi : \mathrm{Diff}_c(\mathbf{R}^m) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ n'est pas continu. Par le lemme 6.5, il existe une boule B_0 et une suite $f_n \in G_{B_0}$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$ et $\Phi(f_n) \to A$, où A est une isométrie non triviale d'une métrique sur N. Munissons N de cette métrique.

Soit $B_1 \subset \mathbf{R}^m$ une boule disjointe de B_0. Comme G_{B_0} et G_{B_1} commutent, l'action sur N de G_{B_1} commute avec A. Soit en outre $H = \overline{\langle A \rangle}$ le sous-groupe fermé du groupe de Lie $\mathrm{Isom}(N)$ engendré par A, *i.e.* l'adhérence dans $\mathrm{Isom}(N)$ du groupe engendré par A. L'action de G_{B_1} sur N commute avec celle de H.

Nous allons démontrer la continuité faible de Φ en étudiant différents cas, selon les propriétés de l'action de H.

Premier cas : H n'agit pas librement sur N

Notons d'abord que, quitte à remplacer H par un de ses sous-groupes fermés, on peut supposer que $\mathrm{Fix}(H)$ est une sous-variété fermée non vide L de N de codimension positive. En effet, si H n'est pas libre, il existe $A' \in H$ non trivial tel que $L = \mathrm{Fix}\,(A') \neq \varnothing$. Si $H' = \overline{\langle A' \rangle}$ est le sous-groupe fermé engendré par A', on a $\mathrm{Fix}(H') = L \neq \varnothing$, et d'après le lemme 6.7 L est une sous-variété fermée de N de codimension positive.

Comme G_{B_1} commute à H, il laisse stable $L = \mathrm{Fix}(H)$, *i.e.* $\Phi(G_{B_1}) \subset \mathrm{Diff}_c(N, L)$. Par le lemme 6.2, on peut donc éclater cette action en une action $\Phi^\sigma = \sigma \circ \Phi : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N^\sigma)$. Cette action préserve le bord $N(L) = \partial N^\sigma$, et induit donc une action $G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(\partial N^\sigma)$. Or $\dim(\partial N^\sigma) = \dim(N) - 1$, donc par hypothèse de récurrence $\Phi^\sigma|_{\partial N^\sigma}$ est faiblement continu.

Pour montrer que Φ est faiblement continu, nous allons exploiter le fait que $\Phi^\sigma|_{\partial N^\sigma}$ est faiblement continu et recoller deux copies de N^σ de manière astucieuse. Soient N_1, N_2 deux copies de N^σ, et soit $N_3 = \partial N^\sigma \times [0,1]$, qui est une variété compacte de bord $\partial N^\sigma \times \{0,1\}$. On définit l'action Φ_i de G_{B_1} sur les N_i par $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi^\sigma$ et $\Phi_3 = \Phi^\sigma|_{\partial N^\sigma} \times \mathrm{id}_{[0,1]}$.

Soient $\alpha_1 : \partial N_1 \xrightarrow{\sim} \partial N^\sigma \times \{0\}$ et $\alpha_2 : \partial N_2 \xrightarrow{\sim} \partial N^\sigma \times \{1\}$ les identifications canoniques. Soit $N' = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ obtenu en recollant N_1 et N_2 à N_3 via les difféomorphismes α_i. N' est une variété compacte sans bord. De plus, les actions Φ_i coïncident sur les bords, donc par le théorème 6.4 on obtient, en recollant les conjugués des Φ_i par des homéomorphismes Ψ_i sur chacun des N_i, une action par difféomorphismes $\Phi' : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N')$.

Montrons que Φ' est faiblement continu. Par le lemme 6.5, il suffit de montrer que si $f_n \in G_{B_1}$ vérifie $f_n \to \mathrm{id}$ et $\Phi'(f_n) \to A$, où A est une isométrie de N', on a $A = \mathrm{id}$. Or, on a vu que $\Phi^\sigma|_{\partial N^\sigma}$ était faiblement continu par hypothèse de récurrence, donc $\Phi_3 = \Phi^\sigma|_{\partial N^\sigma} \times \mathrm{id}_{[0,1]}$ aussi. Mais pour toute $f \in G_{B_1}$, $\Phi'(f) = \Psi_3^{-1} \circ \Phi_3(f) \circ \Psi_3$ sur $N_3 \subset N'$; ainsi, puisque $f_n \to \mathrm{id}$, et comme Ψ_3 est un homéomorphisme, on a $\Phi'(f_n) \to \mathrm{id}$ sur N_3 en topologie $\mathscr{C}^0$, donc $A = \mathrm{id}$ sur N_3. Comme A est une isométrie de N' et que N_3 est d'intérieur non vide, ceci implique $A = \mathrm{id}$ partout. (Notons au passage que nous avons introduit N_3 au lieu de recoller N_1 et N_2 le long de leurs bords pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, qui montre que Φ' est continu sur N_3).

Comme Φ' est faiblement continu, et comme $\Phi'(f) = \Psi_1^{-1} \circ \Phi_1(f) \circ \Psi_1$ sur $N_1 \subset N'$ avec Ψ_1 un homéomorphisme de N_1, l'action $\Phi_1 = \Phi^\sigma : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N^\sigma)$ vérifie la propriété suivante : pour toute suite $f_n \to \mathrm{id}$ à support compact dans G_{B_1}, la suite $\Phi(f_n)$ converge vers id en topologie $\mathscr{C}^0$. Or, pour tout $f \in G_{B_1}$, $\Phi(f) \circ \pi = \pi \circ \Phi^\sigma(f)$, où $\pi : N^\sigma \to N$ est la projection canonique qui est continue, donc Φ vérifie la même propriété. En particulier, le lemme 6.5 implique que Φ est faiblement continu.

Deuxième cas : H agit librement et est infini

Nous pouvons à présent supposer que H agit librement sur N. Comme H est un sous-groupe fermé du groupe de Lie $\mathrm{Isom}(N)$, H est en particulier un sous-groupe de Lie de $\mathrm{Isom}(N)$. Or $\mathrm{Isom}(N)$ est compact, comme nous l'avons vu dans la section 6.2.2, donc H est compact. Deux cas se présentent : soit H est discret, donc fini, soit H est de dimension supérieure ou égale à 1.

Traitons d'abord le cas où H est infini, *i.e.* $\dim(H) \geqslant 1$. Le groupe de Lie compact H agit librement sur N, de façon lisse par le théorème de Myers-Steenrod 6.6, il existe donc une unique structure lisse sur l'espace topologique quotient $N' = N/H$ telle que la projection $N \to N'$ soit lisse. De plus G_{B_1}

commute avec H, il agit donc par difféomorphismes sur N' via $\Phi' : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N')$. Mais N' est compacte et $\dim(N') = \dim(N) - \dim(H) < \dim(N)$, donc par hypothèse de récurrence le morphisme $\Phi' : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N')$ est faiblement continu.

Puisque Φ' est un morphisme faiblement continu, nous pouvons appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.9. *Si $\Phi' : \mathrm{Diff}_c(B_1) \to \mathrm{Diff}_c(N')$ est un morphisme faiblement continu, alors pour tout $p' \in N'$ il existe une boule $B_2 \subset B_1$ telle que $\Phi'(G_{B_2})$ fixe p'.*

Preuve du lemme. Soit $n = \dim(N') + 1$, et soient $B'_1, \ldots, B'_n$ des boules ouvertes deux-à-deux disjointes de B_1. Par le lemme 3.33, il existe un i tel que $\Phi(B'_i)$ fixe p', on prend donc $B_2 = B'_i$. $\square$

Si maintenant $\Phi'(G_{B_2})$ fixe $p' \in N'$, et si $p \in \pi^{-1}(p')$, alors $\Phi(G_{B_2})$ préserve Hp. Comme l'action de H sur N est lisse et libre, et comme l'orbite Hp est compacte donc fermée dans N, il s'agit d'une sous-variété de N, de dimension $\dim(H)$. Quitte à prendre un sous-groupe de H, on peut supposer que $\dim(H) < \dim(N)$. Par hypothèse de récurrence, le morphisme $\Phi|_{Hp} : G_{B_2} \to \mathrm{Diff}_c(Hp)$ est faiblement continu. En répétant le même argument que pour Φ', *i.e.* en appliquant le lemme 6.9 à $\Phi|_{Hp}$, on en déduit qu'il existe une boule $B_3 \subset B_2$ telle que $\Phi(G_{B_3})$ fixe un point $q \in Hp$.

Montrons que Φ est faiblement continu. Soit $f_n \in G_{B_3}$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$ et $\Phi(f_n) \to A$, où A est une isométrie de N ; il suffit de montrer que $A = \mathrm{id}$ par le lemme 6.5. Comme $\Phi(f_n)$ commute avec H, préserve la partie fermée $Hp \subset N$ et fixe q pour tout n, il en va autant de A par passage à la limite. En particulier, A induit par passage au quotient (resp. par restriction) un difféomorphisme A' (resp. $A|_{Hp}$) de N' (resp. Hp), qui est la limite des $\Phi'(f_n)$ (resp. des $\Phi|_{Hp}(f_n)$). Comme $\Phi|_{Hp}$ est faiblement continu, $\Phi(f_n)|_{Hp} \to \mathrm{id}$, donc $A|_{Hp} = \mathrm{id}$; de même, comme Φ' est faiblement continu, $A' = \mathrm{id}$.

Soit $W \subset T_qN$ l'orthogonal de $T_q(Hp) = T_q(Hq)$ pour le produit scalaire sur T_qN induit par la métrique sur N que préserve A. Comme A préserve Hp, D_qA préserve $T_q(Hp)$; or D_qA est une isométrie de T_qN, donc préserve aussi W. Puisque $A|_{Hp} = \mathrm{id}$, $D_qA|_{T_q(Hp)} = \mathrm{id}$; en outre, $\pi \circ A = A' \circ \pi = \pi$, donc si $\pi_W := D_q(\pi)|_W : W \to T_{q'}N'$, on a $\pi_W \circ D_qA|_W = \pi_W$. Or π_W est un isomorphisme car W est un supplémentaire de $\ker(D_q\pi) = T_q(Hp)$, donc $D_qA|_W = \mathrm{id}$. Ainsi, $D_qA = \mathrm{id}$.

L'isométrie A de N vérifie $Aq = q$ et $D_qA = \mathrm{id}$, donc $A = \mathrm{id}$, ce qui montre que Φ est faiblement continu.

Troisième cas : H agit librement et est fini

Pour conclure la preuve, il nous reste à établir que Φ est faiblement continu dans le cas où H est fini et agit librement sur N. Pour cela, nous allons montrer que si Φ n'est pas faiblement continu, on peut construire un groupe infini $\widehat{H} \subset \mathrm{Diff}_c(N)$ qui agit librement sur N et qui commute avec $\Phi(G_B)$ pour une certaine boule B. Nous montrerons ensuite qu'il préserve une métrique sur N, ce qui nous ramènera au cas précédent.

Lemme 6.10. *Si H est fini et agit librement, alors l'une des deux propriétés suivantes est vraie :*

(i) *Φ est faiblement continu.*

(ii) *Il existe un groupe infini fermé $\widehat{H}$ d'isométries de N pour une certaine métrique, agissant librement sur N, ainsi qu'une boule $B \subset \mathbf{R}^n$ telle que G_B commute avec $\widehat{H}$.*

Notons que ce lemme nous ramène au cas précédent, donc montre que Φ est faiblement continu dans le troisième et dernier cas, et ainsi conclut la preuve du théorème 6.8.

Preuve du lemme 6.10. Notons $N_0 := N$, et $H_0 := H$. Le groupe H_0 est fini et agit librement sur N_0 par difféomorphismes, le quotient $N_1 := N_0/H_0$ est donc une variété lisse compacte, et l'application $\pi_0 : N_0 \to N_1$ est un revêtement. L'action $\Phi := \Phi_0$ de G_{B_1} commute à H_0, donc préserve les fibres de π_0 et descend en une action $\Phi_1 : G_{B_1} \to \mathrm{Diff}_c(N_1)$. Comme Φ_0 relève Φ_1, $\Phi = \Phi_0$ est continue si et seulement si Φ_1 l'est. Supposons Φ non faiblement continu, de sorte que Φ_1 n'est pas faiblement continu.

Soit à présent une suite $f_{n,1}$ de G_{B_1} telle que $f_{n,1} \to \mathrm{id}$ et $\Phi_1(f_n) \to A_1$ isométrie de N_1 non triviale, et $H_1 := \overline{\langle A_1 \rangle}$. Si $B_2 \subset \mathbf{R}^n$ est une boule disjointe de B_1, alors $\Phi_1(G_{B_2})$ commute avec H_1. Si H_1 n'agissait pas librement, ou était infini, par l'un des cas précédents Φ_1, donc Φ, serait faiblement continu. Ainsi, H_1 est fini et agit librement sur N_1 à son tour.

On peut ainsi construire par récurrence, pour tout k, une boule $B_k \subset \mathbf{R}^m$ disjointe des B_j avec $j < k$, une variété compacte $N_k = N_{k-1}/H_{k-1}$ (avec H_{k-1} fini) et un morphisme $\Phi_k : G_{B_k} \to \mathrm{Diff}_c(N_k)$ descendant de Φ_{k-1} (car $\Phi_{k-1}(G_{B_k})$ commute avec H_{k-1}, puisque G_{B_k} n'intersecte pas $G_{B_{k-1}}$). Φ_k n'est pas faiblement continu car Φ_{k-1} ne l'est pas, il existe donc une suite $f_{n,k}$ de G_{B_k} telle que $f_{n,k} \to \mathrm{id}$ et $\Phi(f_{n,k}) \to A_k$ isométrie non triviale de N_k. On prend alors $H_k = \langle A_k \rangle$ qui agit librement sur N_k et est fini, sinon Φ_k serait faiblement continu par les cas précédents.

Notons que l'on a, par composition des revêtements (finis) $N_{k-1} \to N_k$, un revêtement fini $N \to N_k$ pour tout k. Soit $\widehat{H}_k$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c(N)$ constitué des relevés à N des éléments de $H_k \subset \mathrm{Diff}_c(N_k)$, qui est fini car H_k ainsi que le revêtement $N \to N_k$ le sont. Comme H_{k-1}, donc $\widehat{H}_{k-1}$, agit trivialement sur $N_k = N_{k-1}/H_{k-1}$, $\widehat{H}_{k-1} \subset \widehat{H}_k$, strictement car H_k n'est pas réduit à $\{\mathrm{id}\}$. Par conséquent, $\widehat{H} = \bigcup_{k\geqslant 1} \widehat{H}_k$ est un sous-groupe infini de $\mathrm{Diff}_c(N)$.

Il nous reste à montrer que $\widehat{H}$ préserve une certaine métrique sur N. Pour cela, nous allons montrer que les éléments de $\widehat{H}$ sont bornés en norme r, puis construire une métrique à partir de moyennes sur $\widehat{H}_k$ de tirés-en-arrière d'une métrique quelconque de N.

Montrons que les éléments de $\widehat{H}$ sont uniformément bornés en norme $\|\cdot\|_r$ (où $\|\cdot\|_r$ a été définie dans la partie 5). Notons que, dans notre construction, nous pouvons supposer que les boules B_k, deux-à-deux disjointes, sont toutes incluses dans la boule unité B de $\mathbf{R}^m$. Montrons, par récurrence sur k, que tout élément $h \in \widehat{H}_k$ est la limite d'une suite de la forme $\Phi(f_{n,k})$, avec $f_{n,k}$ à support dans $\overline{B}$ et $f_{n,k} \to \mathrm{id}$. Le cas $k = 0$ est clair, car H_0 est engendré par A_0, qui est une limite de cette forme. Soit $h_k \in \widehat{H}_k$, qui est le relevé d'un élément $C_k \in \mathrm{Diff}_c(H_k)$. Comme $H_k = \langle A_k \rangle$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $C_k = A_k^p$. Or A_k est, par définition, la limite d'une suite $\Phi_k(f_{n,k})$ avec $f_{n,k} \in G_{B_k}$ tendant vers l'identité, donc $\Phi_k(f_{n,k}^p) \to C_k$. Ainsi, quitte à extraire, la suite $\Phi(f_{n,k}^p)$ (qui relève une suite convergente par un relèvement fini) converge vers un élément h'_k qui descend en $C_k \in \mathrm{Diff}_c(N_k)$, tout comme h_k, donc $h_k'^{-1} h_k \in \widehat{H}_{k-1}$, *i.e.* $h_k \in h'_k \widehat{H}_{k-1}$ avec h'_k de la forme voulue, et l'on conclut par l'hypothèse de récurrence et par produit.

Tout $h \in \widehat{H}$ étant de la forme $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$, avec $f_n \to \mathrm{id}$ à support dans le compact $\overline{B}$. Par le lemme 5.15, on en conclut que $\|h\|_r \leqslant C_r$ et $\|D(h)\| \leqslant C$, où C_r, C sont les constantes du lemme, ne dépendant que du support (ici $\overline{B}$), donc ne dépendant pas de $h \in \widehat{H}$. Si g est une métrique quelconque sur N, on en déduit, à l'aide du lemme 5.14, que la famille de métriques $(h^*g)_{h\in\widehat{H}}$ est bornée en normes $\|\cdot\|_r$ et $\|D(\cdot)\|$, donc la suite de métriques :

$$g_k := \frac{1}{|\widehat{H}_k|} \sum_{h\in\widehat{H}_k} h^*g$$

est également bornée, donc par le lemme 5.13 admet une sous-suite convergeant vers une métrique g'. Or si $h \in \widehat{H}_k$, on a $h^*g_l = g_l$ pour tout $l \geqslant k$, donc $h^*g' = g'$. Ainsi, le groupe $\widehat{H}$ est un groupe infini agissant librement par isométries. Si maintenant $B' \subset \mathbf{R}^m$ ne rencontre pas la boule unité, $B' \cap B_k = \varnothing$

pour tout k, donc $\Phi(G_{B'})$ commute avec $\widehat{H}$. Ceci nous ramène au second cas, ce qui montre que Φ est faiblement continu et conclut la preuve du théorème 6.8. □

□

6.2.4 Extension au cas où N est non compacte

Le théorème 1.1 reste vrai lorsque N n'est plus supposée compacte. En effet, la preuve donnée dans le cas compact s'adapte au cas non compact.

Tout d'abord, les résultats techniques de la partie 5, à commencer par le théorème 5.16, ne supposent pas que N soit compacte. En outre, l'éclatement et le recollement des actions de groupes, qui sont des constructions locales [1], s'étendent au cas où $L \subset N$ est une sous-variété fermée d'une variété quelconque N.

Si N est une variété riemannienne non compacte, tous les résultats donnés sur $\mathrm{Isom}(N)$ restent valides, à l'exception de la compacité de $\mathrm{Isom}(N)$. Cette difficulté est levée en remarquant que l'action de $\mathrm{Isom}(N)$ sur N est propre. Si A est une isométrie non triviale de N, le sous-groupe fermé de $\mathrm{Isom}(N)$ engendré par A, soit H, est donc un groupe de Lie agissant proprement sur N. Si H agit librement, on peut donc toujours former le quotient $N' = N/H$, sur lequel G_{B_1} agit par difféomorphismes. De plus, l'orbite Hp est fermée car H agit proprement, donc est une sous-variété fermée de N. Le reste de la preuve n'est pas affecté par la non compacité de N.

Nous pouvons donc énoncer, compte tenu du théorème 3.29, qui ne suppose pas N compacte :

Théorème 6.11. *Soient M, N deux variétés lisses, et $\Phi : \mathrm{Diff}_c(M) \to \mathrm{Diff}_c(N)$ un morphisme de groupes. Alors Φ est faiblement continu. Si de plus $\dim(M) \geqslant \dim(N)$, alors $\dim(M) = \dim(N)$ et Φ est topologiquement diagonal étendu.*

1. Par exemple, les homéomorphismes Ψ_i de N_i que nous avons construits dans la proposition 6.3 sont à support dans un voisinage du bord ∂N_i.

Bibliographie

[Avi] A. Avila, *Distortion elements in* $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, arXiv :0808.2334, 2008.

[Ban] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[Bou] A. Bounemoura, *Simplicité des groupes de transformations de surfaces*, Ensaios Matematicos, SBM, **14** (2008), 1-143.

[CF] D. Calegari, M.H. Freedman, *Distortion in transformation groups.* Geom. Top. **16** (2006), 267-293.

[Con] A. Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290** (1980), A599-A604 ; MR 81c :46053.

[FH] J. Franks ; M. Handel, *Distortion elements in group actions on surfaces.* Duke Math. J. **131** (2006), no 3, 441-468.

[Fil] R. P. Filipkiewicz, *Isomorphisms between diffeomorphism groups.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, **2** (1982), pp 159-171.

[Ghy] E. Ghys, *Prolongements des difféomorphismes de la sphère.* Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 45-59.

[Hir] M.W. Hirsch, *Differential topology.* Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer, 1976.

[HT] S. Haller, J. Teichmann. *Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones.* Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 53-63.

[Hur] S. Hurtado, *Continuity of discrete homomorphisms of diffeomorphism groups*, preprint, arXiv :1307.4447, 2013.

[Man] Kathryn Mann, *Homomorphisms between diffeomorphism groups.* arXiv :1206.1196 [math.GT], 2012.

[Mat] J. Mather, *Integrability in codimension 1*, Comment. Math. Helv. **48** no 1 (1973), 195–233.

[Mili] E. Militon, *Éléments de distorsion du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte.* arXiv :1005.1765 [math.DS], 2012.

[Miln] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

[MZ] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups.* Wiley (Interscience), New York, 1955.

[Par] K. Parkhe, *Smooth gluing of group actions and applications*, arXiv :1210.2325 [math.DS], 2012.

[Pau] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Notes de cours, École Normale Supérieure.

[Thu] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms.* Bull. Amer. Math. Soc. **80**, 1974, 304–307.

[Whit] J.V. Whittaker, *On isomorphic groups and homeomorphic spaces*, Ann. Math. **78** (1963), 74-91.